Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 439-477

ALGÉBRICITÉ MODULO p, SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES ET STRUCTURES DE FROBENIUS FORTES

PAR DANIEL VARGAS-MONTOYA

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'étude de l'algébricité modulo p des G-fonctions de Siegel. Notre but est de souligner la pertinence de la notion de structure de Frobenius forte, classiquement étudiée dans la théorie des équations différentielles p-adiques, pour l'étude d'une conjecture d'Adamczewski et Delaygue concernant le degré d'algéricité de réductions modulo p de G-fonctions. Nous rendons d'abord explicite un résultat de Christol en montrant que si $f(z)$ est une G-fonction qui annule un opérateur différentiel dans $\mathbb{Q}(z)[d/dz]$ d'ordre n qui est muni d'une structure de Frobenius forte de période h pour le nombre premier p et que $f(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$, alors la réduction de f modulo p est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ et son degré d'algébricité est majoré par p^{n^2h}. En généralisant une approche introduite par Salinier, nous montrons ensuite qu'un opérateur fuchsien à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, dont le groupe de monodromie est rigide et dont les exposants sont rationnels, possède, pour presque tout nombre premier p, une structure de Frobenius forte de période h, où h est majorée explicitement et indépendamment de p. Une version légèrement différente de ce résultat a été démontré récemment par Crew en suivant une approche différente fondée sur la cohomologie p-adique. Nous utilisons ces deux résultats pour résoudre la conjecture mentionnée dans le cas des séries hypergéométriques généralisées.

Texte reçu le 8 mai 2020, modifié le 3 novembre 2020, accepté le 16 mars 2021.

DANIEL VARGAS-MONTOYA, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, Batîment Braconnier, 21 Avenue Claude Bernard, 69100 Villeurbanne • *E-mail :* `vargas@math.univ-lyon1.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11E95, 12H25.

Mots clefs. — Structure de Frobenius forte, réduction modulo p, algébricité modulo p, équations différentielle p-adique, rigidité.

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Grant Agreement No 648132.

© Société Mathématique de France
doi:10.24033/bsmf.2834

Abstract (*Algebraicity modulo p, hypergeometric series and strong Frobenius structure*). — This work is devoted to study of algebraicity modulo p of Siegel's G-functions. Our goal is emphasize the relevance of the notion of strong Frobenius structure, classically studied in the theory of the p-adic differential equations, for the study of a Adamczewski–Delaygue's conjecture concerning the degree of algebraicity modulo p of G-functions. For this, we first make a Christol's result explicit by showing that if $f(z)$ is a G-function which is a solution of a differential operator in $\mathbb{Q}(z)[d/dz]$ of order n which has a strong Frobenius structure with period h for the prime number p and that $f(z)$ belongs to $\mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, then the reduction of $f(z)$ modulo p is algebraic over $\mathbb{F}_p(z)$ and its degree of algebraicity is bounded by p^{n^2h}. By generalizing an approach introduced by Salinier, we then show that a Fuchsian operator with coefficients in $\mathbb{Q}(z)$, whose monodromy group is rigid and whose exponents are rational has for almost all prime numbers p a strong Frobenius structure with period h, where h is explicitly bounded and does not depend on p. A slightly different version of this result has been demonstrated recently by Crew following a different approach based on the p-adic cohomology. We use these two results to solve the mentioned conjecture in the case of generalized hypergeometric series.

1. Introduction

Etant donnés un corps K et une série formelle de plusieurs variables $g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a(i_1,\dots,i_n)z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\in K[[z_1,\dots,z_n]]$, on définit la *diagonale* de g comme la série formelle d'une variable

$$f(z)=\sum_{j\geq 0} a(j,j,\dots,j)z^j\in K[[z]].$$

Lorsque K est de caractéristique nulle, cette opération est transcendante, dans le sens où la diagonale d'une série formelle algébrique (i.e., algébrique sur le corps des fractions rationnelles $K(z_1,\dots,z_n)$) est généralement transcendante sur le corps $K(z)$. Un exemple très simple, voir [1], est donné par la diagonale de la fraction rationnelle $\frac{4}{(2-z_1-z_2)(2-z_3-z_4)}$ qui est égale à

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{4n}}\binom{2n}{n}^2 z^n\in\mathbb{Q}[[z]].$$

En revanche, lorsque K est un corps de caractéristique non nulle, Furstenberg [18] a montré que la diagonale d'une série formelle rationnelle est toujours algébrique. Deligne [13] a ensuite étendu ce résultat au cas des diagonales de séries formelles algébriques. Il souligne également la conséquence remarquable suivante : si $f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)z^n\in\mathbb{Z}[[z]]$ est la diagonale d'une série formelle algébrique, alors pour tout nombre premier p, la réduction modulo p de f, c'est-à-dire la série formelle

$$f_{|p}(z)=\sum_{n\geq 0}(a(n) \bmod p)z^n\in\mathbb{F}_p[[z]]\,,$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$. Un problème naturel consiste alors à étudier la façon dont le degré d'algébricité de $f_{|p}$ varie avec p. Deligne suggère dans [13] qu'il existe une constante c indépendante de p telle que $\deg(f_{|p}) < p^c$. Il prouve également que c'est bien le cas pour les diagonales de fonctions algébriques de deux variables. Le cas général n'est traité que plus récemment par Adamczewski et Bell dans [1]. Ces auteurs montrent également, qu'on ne peut, en général, espérer mieux qu'une majoration polynomiale en p. Lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$, les diagonales de séries formelles algébriques forment une sous-classe de celle des G-fonctions introduite par Siegel [23] en 1929. Rappelons que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une G fonction si les a_n sont des nombres algébriques et s'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que :

1. la fonction f annule un opérateur différentiel L à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;
2. la valeur absolue de chaque conjugué de Galois de a_n est inférieure à C^{n+1} pour tout $n \geq 0$;
3. il existe une suite D_m d'entiers strictement positifs tels que $D_m < C^m$ et $D_m a_n$ est un entier algébrique pour tout $n \leq m$.

Cette définiton implique qu'il existe un corps de nombres K tel que $f(z) \in K[[z]]$. Considérons un tel K. Soient ϑ_K l'anneau des entiers de K et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de ϑ_K tel que les coefficients de f appartiennent à $\vartheta_{K,\mathfrak{p}}$, la localisation de ϑ_K en $\mathfrak{p}$. Notons $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel de $\vartheta_{K,\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p} = \vartheta_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\vartheta_{K,\mathfrak{p}} = \vartheta_K/\mathfrak{p}$. On peut alors réduire f modulo $\mathfrak{p}$ et poser

$$f_{|\mathfrak{p}}(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n \bmod \mathfrak{p}) z^n \in \boldsymbol{k}_\mathfrak{p}[[z]]$$

et formuler la conjecture suivante [4].

Conjecture 1.1 (Adamczewski-Delaygue). — *Soient K un corps de nombres et $f(z) \in K[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de ϑ_K tel que $f \in \vartheta_{K,\mathfrak{p}}[[z]]$ soit infini. Alors, on a :*

(i) *$f_{|\mathfrak{p}}$ est algébrique sur $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p}(z)$ pour presque tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$;*
(ii) *il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\mathfrak{p}$ vérifiant* (i), *$\deg(f_{|\mathfrak{p}}) < p^c$, où p désigne la caractéristique du corps $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p}$.*

Les résultats de Deligne [13] et d'Adamczewski et Bell [1] mentionnés précédemment montrent que cette conjecture est vérifiée pour les diagonales de séries algébriques et l'article [3] fournit également d'autres familles d'exemples parmi les séries hypergéométriques généralisées ou les sommes multiples de produits de coefficients binomiaux. C'est en paticulier le cas de la série hypergéométrique $f_1(z) =_2 F_1(1/2, 1/2; 2/3, z)$ qui n'est pas la diagonale d'une série formelle algébrique car elle n'est pas globalement bornée. Par contre, d'après la proposition 8.5 de [3], en considérant l'ensemble $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P} : p \equiv 1 \mod 3\}$, on obtient que pour tout $p \in \mathcal{S}$, f_1 peut se réduire modulo p et $f_{1|p}(z) = A_p(z) f_{1|p}(z)^p$ où $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z)$. Ainsi, $f_{1|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ et $\deg(f_{1|p}) < p$.

Notons que la méthode utilisée dans [1] est spécifique aux diagonales de séries formelles algébriques, tandis que les résultats de [3] se fondent sur une analyse minutieuse de la valuation p-adique des coefficients et ne concernent pas toutes les séries hypergéométriques généralisées. Dans cet article, notre objectif est justement de prouver une version explicite de la conjecture 1.1 pour les séries hypergéométriques généralisées à paramètres rationnels et de sortir ainsi du cadre des G-fonctions globalement bornées. Il s'agit du théorème 1.2 ci-dessous. Rappelons que ces séries sont de la forme

$$ {}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z)=\sum_{j\geq 0}\frac{(\alpha_1)_j\cdots(\alpha_n)_j}{(\beta_1)_j\cdots(\beta_{n-1})_j j!}z^j $$

où $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\underline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},1)\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0})^n$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, $(x)_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$ et $(x)_0=1$. Nous désignons par $\mathbb{Z}_{(p)}$ la localisation de l'anneau $\mathbb{Z}$ en l'idéal (p). Le corps résiduel de $\mathbb{Z}_{(p)}$ est alors $\mathbb{F}_p$.

Théorème 1.2. — *Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},\beta_n=1\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ tels que pour tout i,j, $\alpha_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}$. Soit $d_{\alpha,\beta}$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots,\beta_n$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z)\in\mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Alors, pour tout $p\in\mathcal{S}$, la réduction modulo p de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par $p^{n^2\phi(d_{\alpha,\beta})}$, où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler.*

La notion de *structure de Frobenius forte*, introduite par Dwork [15], est classiquement utilisée dans la théorie des équations différentielles p-adiques. Dans cette article, nous montrons comment cette notion permet d'établir une stratégie générale pour attaquer la conjecture 1.1 (voir section 2). En particulier, la preuve du théorème 1.2 repose sur la notion de structure de Frobenius forte. L'idée de la démonstration est la suivante. Lorsque les paramètres α_i et β_j vérifient les hypothèses du théorème 1.2, on sait que les équations hypergéométriques correspondantes ont des groupes de monodromie rigides, que leurs singularités sont régulières et que leurs exposants sont rationnels. Ces trois propriétés peuvent être utilisées pour démontrer l'existence d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p dont la période est indépendante du nombre premier p. Dans le cas des équations hypergéométriques de Gauss, cette stratégie a été mise en œuvre par Salinier [22]. Notons qu'avant le travail de Salinier, Dwork avait déjà montré par une approche différente que, sous ces hypothèses, l'opérateur hypergéométrique de Gauss est muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p (voir [16, Chap. 7, 7.2.2]). Le théorème 3.8 montre de façon plus générale que les systèmes différentiels rigides sont munis d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p dont la période peut être majorée explicitement et indépendamment du nombre premier p. Notre démonstration de ce résultat généralise l'approche de Salinier au cas des systèmes différentiels rigides ou, de façon équivalente, au cas des équations différentielles sans para-

mètre accessoire (cf. [19]). Notons par ailleurs que Crew [11] a également obtenu récemment un résultat similaire en suivant une approche différente fondée sur la cohomologie p-adique. Nous précisons que nous n'avons pris connaissance de l'article [11] qu'après avoir démontré le théorème 3.8. Pour davantage de précisions, notamment sur le lien entre le théorème 3.8 et les résultats de Katz [19], Crew [11], et Esnault et Groechenig [17], nous renvoyons le lecteur à la discussion précédant et suivant le théorème 3.8. D'autre part, notre théorème 2.6 établit un lien entre l'existence, pour un nombre premier p, d'une structure de Frobenius forte de période h pour un opérateur différentiel d'ordre n et le degré d'algébricité modulo p des solutions (séries formelles) de cet opérateur en fonction de p, n et h. Il rend explicite des arguments donnés par Christol dans [9]. En utilisant la rigidité des équations hypergéométriques généralisées et en combinant les théorèmes 2.6 et 3.8, on obtient finalement le théorème 1.2. Au vu de la conjecture 1.1 et du théorème 2.6, nous insistons sur le fait que, dans le théorème 3.8, il est essentiel que la période des structures de Frobenius fortes puisse être majorée indépendamment de p.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous rappelons la notion de structure de Frobenius forte et nous énonçons le théorème 2.6. Dans la section 3, nous rappelons la notion d'opérateur différentiel rigide et énonçons le théorème 3.8. Les théorèmes 2.6 et 3.8 sont respectivement démontrés dans les sections 4 et 5. Enfin, dans la section 6, nous prouvons le théorème 1.2 et l'illustrons à l'aide de quelques exemples.

2. Structure de Frobenius forte et algébricité modulo p

Dans cette partie, nous rappelons la définition du corps des éléments analytiques E_p et celle de structure de Frobenius forte d'un opérateur différentiel, puis nous énonçons le théorème 2.6. Étant donné un nombre premier p, nous noterons $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Nous rappelons que la valuation de $\mathbb{Z}_p$ s'étend de manière unique à $\mathbb{C}_p$. Nous désignerons par π_p, un élément de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $\pi_p^{p-1} = -p$.

2.1. Éléments analytiques. — Soit K un corps ultramétrique de caractéristique nulle muni de la valuation $|\cdot|$ et k son corps résiduel de caractéristique p. Pour $|x| \leq 1$ nous notons $\bar{x}$ l'élément de k qui représente la classe résiduelle de x. Nous supposons que K est complet pour la norme $|\cdot|$. Nous dirons que $\sigma : K \to K$ est un automorphisme de Frobenius si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $x \in K$, $|\sigma(x)| = |x|$;
2. pour tout $x \in K$, $|x| \leq 1$, $|\sigma(x) - x^p| < 1$. Autrement dit, $\overline{\sigma} : k \to k$ donné par $\overline{\sigma}(\overline{x}) = \overline{\sigma(x)}$ est l'endomorphisme de Frobenius. Remarquons que $\overline{\sigma}$ est bien défini par le point 1.

Remarque 2.1. — La proposition 1.10.1 de [8] montre que le corps $\mathbb{C}_p$ possède un automorphisme de Frobenius, mais celui-ci n'est pas unique. Dans la suite, nous fixons un tel automorphisme que nous notons $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ et que nous appellerons l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{C}_p$.

Nous montrons à présent comment construire le corps des éléments analytiques. Nous désignons par $\mathcal{W}$ l'anneau d'Amice qui est l'ensemble des séries formelles

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

telles que les a_n sont des éléments de K dont la valeur absolue est bornée et tend vers zéro lorsque n tend négativement vers l'ínfini. D'après la proposition 1.1 de [9], l'anneau $\mathcal{W}$ est un K-espace vectoriel complet pour la norme définie par $|f| = sup\{|a_n| : n \in \mathbb{Z}\}$. L'anneau $K[z]$ est contenu dans l'anneau $\mathcal{W}$ et ainsi, l'anneau $K[z]$ est muni de la norme de Gauss

$$\left|\sum a_j z^j\right|_{\mathcal{G}} = sup|a_j|.$$

De plus, d'après la proposition 1.2 de [9], tout élément non nul de $K[z]$ est inversible dans $\mathcal{W}$, ce qui implique que l'anneau des fractions rationnelles $K(z)$ est contenu dans $\mathcal{W}$. La norme de $\mathcal{W}$ induit une norme sur $K(z)$ qui s'exprime comme

$$\left|\frac{\sum a_j z^j}{\sum b_i z^i}\right|_{\mathcal{G}} = \frac{sup|a_j|}{sup|b_i|}.$$

Comme $\mathcal{W}$ est complet, le complété de $K(z)$ pour la norme de Gauss est également contenu dans $\mathcal{W}$.

Définition 2.2 (Éléments analytiques). — Le corps des éléments analytiques E_K est le complété du corps $K(z)$ pour la norme de Gauss dans $\mathcal{W}$. Dans le cas où $K = \mathbb{C}_p$, le corps des éléments analytiques est noté E_p et l'analogue de $\mathcal{W}$ est noté $\mathcal{W}_p$.

Remarque 2.3. — Pour tout $f \in K(z)$, on a

$$\left|\frac{d}{dz}(f)\right|_{\mathcal{G}} \leq |f|_{\mathcal{G}}.$$

Ainsi, la dériviation $\frac{d}{dz} : K(z) \to K(z)$ est une fonction continue pour la norme de Gauss et elle s'étend naturellement au corps E_K des éléments analytiques. On note encore son extension $\frac{d}{dz} : E_K \to E_K$.

Définition 2.4 (E_p-équivalence). — Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(E_p)$. Nous disons que A et B sont E_p-équivalentes s'il existe $H \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - HB.$$

2.2. Structure de Frobenius forte. — Nous définissons l'application $Frob_{z^p}$: $\mathbb{C}_p(z) \to E_p$ par

$$Frob_{z^p}\left(\frac{\sum a_i z^i}{\sum b_j z^j}\right) = \frac{\sum Frob(a_i) z^{pi}}{\sum Frob(b_j) z^{pj}}.$$

Cette application est une isométrie. Il s'agit donc d'une application continue qui s'étend au corps des éléments analytiques E_p. Nous la notons encore $Frob_{z^p}$: $E_p \to E_p$. C'est à nouveau une isométrie et, pour tout $e \in E_p$, on a

$$\frac{d}{dz}(Frob_{z^p}(e)) = pz^{p-1}\left(Frob_{z^p}(\frac{d}{dz}e)\right). \tag{1}$$

Soit A une matrice de taille n à coefficients dans E_p, nous considérons la matrice $F_{z^p}(A) := \frac{d}{dz}(z^p)A^{Frob_{z^p}} = pz^{p-1}A^{Frob_{z^p}}$, où $A^{Frob_{z^p}}$ est la matrice obtenue après avoir appliqué $Frob_{z^p}$ à chaque entrée de A.

Étant donné un opérateur différentiel d'ordre n

$$L := a_0(z)\frac{d}{dz^n} + a_1(z)\frac{d}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}[z][d/dz]\,, \tag{2}$$

on définit la *matrice compagnon* associée à L par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{-a_n(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_{n-1}(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_{n-2}(z)}{a_0(z)} & \dots & \frac{-a_2(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_1(z)}{a_0(z)} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.5 (Structure de Frobenius forte). — Soit $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ un opérateur différentiel et soit A sa matrice compagnon. Nous disons que L a une structure de Frobenius forte de période h pour un nombre premier p s'il existe un entier strictement positif h tel que la matrice A et la matrice obtenue en appliquant h-fois F_{z^p} à A sont E_p-équivalentes. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z))$, cela revient à dire qu'il existe $H \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - p^h z^{p^h-1} HA(z^{p^h}). \tag{3}$$

Le plus petit entier $h \geq 1$ ayant cette propriété est appelé *la période* de la structure de Frobenius associée au couple (L, p).

Par exemple, d'après [20, Chap. 22, Theorem 22.2.1] ou [5, Chap. V, p. 111], les *équations de Picard-Fuchs* sont munies d'une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p. Le résultat qui suit montre le lien entre l'existence d'une structure de Frobenius forte pour p de l'opérateur différentiel L et l'algébricité modulo p de ses solutions.

Voir aussi la discussion p. 351 de [20] et les références associées.

Théorème 2.6. — *Soit $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ d'ordre n. Soit p un nombre premier pour lequel l'opérateur différentiel L a une structure de Frobenius forte de période h et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a(n)z^n \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ une solution de L. Soit $f_{|p}$ la réduction de f modulo $p\mathbb{Z}_{(p)}$. Alors la série formelle $f_{|p}$ est une série algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{n^2h}.*

Notons que nous pourrions aussi énoncer ce théorème dans le cas d'un opérateur à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, la démonstration s'obtiendrait de la même façon. Le théorème 2.6 nous dit que pour montrer le point 1 de la conjecture 1.1 il suffit de voir que f annule un opérateur muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p dans $\mathcal{S}$.

Remarque 2.7. — Si $L \in \mathbb{Q}[z][d/dz]$ est un opérateur différentiel muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p et $f \in \mathbb{Q}[[z]]$ est une solution de L, alors f est une G fonction. En effet, l'hypothèse faite sur L implique que le rayon de convergence au point générique est égal à 1 pour presque tout p. Cela découle des propositions 4.1.2, 4.6.4 et 4.7.2 de [8]. D'après la proposition 5.1 et le théorème 6.1 de [14, Chap. III], on obtient alors que les singularités de L sont régulières à exposants rationnels. Enfin, en combinant cette propriété avec le théorème 4.2 [14, Chap. VII] et la proposition 1.1 de [14, Chap. VIII], on obtient que f est une G fonction.

3. Structure de Frobenius forte et rigidité

Notre troisième résultat, le théorème 3.8, concerne les opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{Q}[z]$ dont le groupe de monodromie est rigide. Nous commençons par rappeler la notion de système différentiel rigide. Étant donné le système différentiel

$$\frac{d}{dz}y = Ay, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z)), \tag{4}$$

nous disons que $\gamma \in \mathbb{C}$ est un point *singulier* du système différentiel (4) si γ est un pôle de A. L'infini est un point singulier de (4) si zéro est un point singulier du système différentiel obtenu après avoir appliqué le changement de variable $z \mapsto 1/z$ au système (4). Nous disons que $\gamma \in \mathbb{C}$ est un point *singulier régulier* du système différentiel (4) si γ est un point singulier et s'il existe une matrice $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que la matrice $(z-\gamma)A_\gamma$ n'a pas de pôle en γ et qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-\gamma\}))$ telle que $\frac{d}{dz}P = AP - PA_\gamma$, où $\mathbb{C}(\{z-\gamma\})$ est le corps des séries de Laurent convergentes au voisinage de γ. L'infini est un point singulier régulier de (4) si zéro est un point singulier régulier du système différentiel obtenu après avoir appliqué le changement de variable $z \mapsto 1/z$ au système (4). Le système différentiel (4) est *fuchsien* si tous

ses points singuliers sont singuliers réguliers. Soit x un point non singulier du système différentiel (4), d'aprés la théorie classique de Cauchy

$$Sol(A)_x = \{y \in \mathbb{C}(\{z-x\})^n \text{ et } \frac{d}{dz}y = Ay\}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $F = \{y_1, \ldots, y_n\}$ une base de $Sol(A)_x$, S l'ensemble de points singuliers de (4) et $\gamma \in S$. Les coordonnées des vecteurs $y_1, \ldots, y_n$ peuvent être prolongées analytiquement le long du lacet τ, où $[\tau] \in \Pi_1(\mathbb{C}\backslash S, x)$ et τ est un lacet autour de γ tel que le groupe engendré par $[\tau]$ est $\mathbb{Z}$. Ainsi, on obtient un nouvel ensemble $\widetilde{F}$ qui sera encore une base de $Sol(A)_x$. Alors la matrice de *monodromie locale en* γ, notée $M(A,\gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, est la matrice de changement de base de F vers $\widetilde{F}$. Le théorème de monodromie complexe nous garanti que si $[\tau] = [\alpha]$, on obtient encore l'ensemble $\widetilde{F}$ en prolongeant les coordonnées des vecteurs $y_1, \ldots, y_n$ le long du lacet α. Écrivons $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le *groupe de monodromie* de (4) est le groupe engendré par les matrices $M(A,\gamma_1), \ldots, M(A,\gamma_r)$ qui satisfont à la relation $M(A,\gamma_1)\cdots M(A,\gamma_r) = Id$. D'après la construction, le groupe de monodromie dépend de la base F. Si nous prenons une autre base F_1 de $Sol(A)_x$ alors ces deux groupes de monodromie sont conjugués. Ainsi le groupe de monodromie est unique à conjugaison près.

Soit

$$\frac{d}{dz}y = A'y, \quad A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z)) \tag{5}$$

un système différentiel. Supposons que les systèmes (4) et (5) sont fuchsiens et que zéro est un point singulier régulier de (4) et de (5). On dit que A et A' sont *localement équivalentes en zéro* si les matrices de monodromie locale en zéro de (4) et (5) sont conjuguées. D'après le théorème 5.1 de [21], cela revient à dire qu'il existe P une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{C}(\{z\})$ telle que

$$\frac{d}{dz}P = AP - PA',$$

où $\mathbb{C}(\{z\})$ est le corps des séries de Laurent qui convergent. Soit x_0 un point singulier régulier de (4) et de (5) On dit que A et A' sont *localement équivalentes en* x_0 si, après application du changement de variable $z \mapsto z - x_0$ à (4) et (5), les nouveaux systèmes sont localement équivalents en zéro. On dit que A et A' sont *localement équivalentes*, si elles sont localement équivalentes en tous points.

Définition 3.1 (Système rigide). — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ et $\frac{d}{dz}y = Ay$ un système différentiel fuchsien. Un tel système est dit *rigide* si, pour tout système $\frac{d}{dz}y = A'y$ fuchsien tel que A et A' sont localement équivalentes, il existe

$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}P = AP - PA'.$$

Autrement dit, les matrices A et A' sont $\mathbb{C}(z)$-*équivalentes*.

En général pour un corps quelconque K, nous disons que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(K(z))$ sont $K(z)$-*équivalentes* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K(z))$ telle que $\frac{d}{dz}P = AP - PA'$.

Définition 3.2 (Groupe rigide). — Soient $g_1, \ldots, g_r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et G le groupe engendré par ces matrices. Le r-uplet $g_1, \ldots, g_r$ est dit irréductible si G agit de manière irréductible sur $\mathbb{C}^n$. Le groupe G est dit rigide si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. le r-uplet $g_1, \ldots, g_r$ est irréductible ;
2. on a $g_1 \cdots g_r = Id$;
3. pour tout r-uplet $\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_r}$ tel que $\widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_r} = Id$, où $\widetilde{g_i}$ est conjugué à g_i, il existe une matrice $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\widetilde{g_i} = U g_i U^{-1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Proposition 3.3. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ et $\frac{d}{dz}y = Ay$ fuchsien. Si le groupe de monodromie de $\frac{d}{dz}y = Ay$ est rigide alors le système $\frac{d}{dz}y = Ay$ est rigide.*

En effet, cette proposition découle de la proposition suivante qui est un cas particulier du théorème 6.15 de [21].

Proposition 3.4. — *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$. Si $\frac{d}{dz}y = Ay$ et $\frac{d}{dz}y = A'y$ sont deux systèmes fuchsiens dont les groupes de monodromie sont conjugués, alors les matrices A et A' sont $\mathbb{C}(z)$-équivalentes.*

Soient $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ et A sa matrice compagnon. Si L est un opérateur fuchsien, alors le système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$ est fuchsien (cf. remarque 5.4).

Définition 3.5 (Opérateur rigide). — Soient $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ fuchsien et A sa matrice compagnon. L'opérateur L est rigide si le système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$ est dit rigide.

Le calcul de la matrice de monodromie locale n'est pas facile. Par contre, dans le cas où γ est un point singulier régulier nous pouvons la calculer à conjugaison près. Nous ferons cela dans le lemme suivant. Avant, nous rappelons la notion *d'exposants en* γ. Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ un point singulier régulier du système (4). Cela veut dire qu'il existe une matrice $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que les matrices A et A_γ sont localement équivalentes en γ et la matrice $(z-\gamma)A_\gamma$ n'a pas de pôle en γ. Les exposants en γ sont les valeurs propres de la matrice $[(z-\gamma)A_\gamma](\gamma)$. Dans le cas que $\gamma = \infty$, γ est un point singulier régulier s'il existe une matrice $A_\infty \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que les matrices A et A_∞ sont localement équivalentes

en γ et la matrice zA_∞ n'a pas de pôle en γ. Les exposants en l'infini sont les valeurs propres de la matrice $[zA_\infty](\gamma)$. Notons que cette définition dépend de la matrice A_γ. Par contre, d'après le lemme 2.4 de [14, Chap V], si A'_γ est telle que A et A'_γ sont localement équivalentes en γ et $(z-\gamma)A'_\gamma$ n'a pas de pôle en γ, alors les valeurs propres de $[(z-\gamma)A_\gamma](\gamma)$ et les valeurs propres de $[(z-\gamma)A'_\gamma](\gamma)$ sont égales modulo $\mathbb{Z}$.

Lemme 3.6. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ et $\gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ un point singulier régulier du système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$. Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(2\pi i C)$ est conjuguée à la matrice de monodromie locale de A en γ et satisfaisant aux deux propriétés suivantes :*

- **(a)** *si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C, alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$,*
- **(b)** *l'ensemble des exposants de A en γ et l'ensemble des valeurs propres de C sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Sans perdre de généralité supposons que $\gamma = 0$. Soit $A_0(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que les matrices $A(z)$ et $\frac{1}{z}A_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro et A_0 n'a pas de pôle en zéro. Comme $A_0(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[z]])$, le lemme 8.2 et le corollaire 8.3 de [14, chap. III] nous assure l'existence d'une matrice $W_0(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[z]])$ telle que les matrices $\frac{1}{z}A_0(z)$ et $\frac{1}{z}W_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro et les valeurs propres de $C := W_0(0)$ satisfont aux conditions **(a)** et **(b)** de l'énoncé. D'après le théorème 5.1 de [21], on obtient que la matrice de monodromie locale du système $\frac{d}{dz}y = \frac{1}{z}W_0(z)y$ en 0 est conjuguée à $\exp(2\pi i C)$. Puisque $\frac{1}{z}A_0(z)$ et $\frac{1}{z}W_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro, alors toujours par le théorème 5.1 de [21], la matrice de monodromie locale en zéro du système $\frac{d}{dz}y = \frac{1}{z}A_0(z)y$ est conjuguée à $\exp(2\pi i C)$. Finalement, comme $A(z)$ et $\frac{1}{z}A_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro alors, d'après le théorème 5.1 de [21], la matrice de monodromie locale en zéro de $\frac{d}{dz}y = A(z)y$ est conjuguée à $\exp(2\pi i C)$ et comme nous l'avons déjà écrit, C satisfait aux conditions **(a)** et **(b)**. □

Remarque 3.7. — Soit K un corps algébriquement clos. Il suit de la démonstration du lemme 8.2 et du corollaire 8.3 de [14, Chap.III] que, si $A_0 \in \mathcal{M}_n(K(z))$, alors $W_0 \in \mathcal{M}_n(K(z))$ et les matrices $\frac{1}{z}A_0(z)$ et $\frac{1}{z}W_0(z)$ sont $K(z)$-équivalentes. De plus, la matrice $C := W_0(0)$ vérifie les conditions du lemme 3.6.

D'après Katz [19, Theorem 9.4], si L est un opérateur rigide alors le module différentiel défini par L est un sous-module différentiel d'un module différentiel associé à une équation de *Picard-Fuchs*. Or les équations de Picard-Fuchs sont munies d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p (voir par exemple [20, Theorem 22.2.1]). Ainsi, on peut s'attendre à ce qu'un opérateur rigide soit muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p. Le

théorème 3.8 montre que c'est bien le cas et que, de plus, la période h des structures de Frobenius fortes peut être majorée explicitement et indépendamment du nombre premier p. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce dernier point est essentiel au vu de la conjecture 1.1 et du théorème 2.6. Comme nous l'a indiqué Gilles Christol, il semble que l'on puisse obtenir l'existence d'une structure de Frobenius forte pour n'importe quel sous module N d'un module différentiel M associé à une équation de Picard-Fuchs. En effet, d'après le théorème 4.2.6 [12], M est semi-simple et donc N est semi-simple et on peut le décomposer comme somme directe finie de sous-modules simples N_i. Rappelons que d'après le Theorem 22.2.1 de [20], M a une structure de Frobenius forte pour presque tout p. Soit p l'un de ces nombres premiers et h la période de la structure de Frobenius forte correspondante. En notant ϕ le Frobenius, on a donc que $\phi^h(M)$ et M sont isomorphes. Donc, pour tout $m \geq 1$, $\phi^{mh}(N_i)$ est sous module simple de $\phi^h(M)$ et on obtient l'existence de deux entiers m et m' tels que $\phi^{mh}(N_i)=\phi^{m'h}(N_i)$. Autrement dit, N_i est muni d'une structure de Frobenius forte pour p. On en déduit que N est muni d'une structure de Frobenius forte pour p car l'application ϕ respecte les sommes directes. Malheureusement, cet argument ne permet pas de majorer précisément la période h de cette structure de Frobenius forte, ni même de la majorer indépendamment de p. L'intérêt principal du théorème 3.8 est qu'il permet justement de majorer la période des structures de Frobenius fortes des opérateurs rigides indépendamment de p. Le théorème 3.8 a également été obtenu sous une forme légèrement différente, mais essentiellement équivalente, par Crew [11]. Il nous semble néanmoins utile de présenter la démonstration proposée ici qui est écrite dans un langage différent et plus élémentaire, notamment exempt de toute considération cohomologique. Notons qu'un cas particulier du théorème 1.5 de [17] implique aussi qu'un opérateur différentiel satisfaisant aux conditions du théorème 3.8 a une structure de Frobenius forte pour presque tout p. Mais ce dernier résultat ne donne pas explicitement de renseignement sur la période des structures de Frobenius associées et ne permet donc pas d'utiliser le théorème 2.6 comme nous le faisons.

Avant d'énoncer le théorème 3.8, considérons L défini comme en (2) et supposons que les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels. Soit s la valuation de $a_0(z)$. Considérons les ensembles suivants : $\mathfrak{A}_1$ est formé du terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$, le coefficient leader de $a_0(z)$ et du discriminant de $a_0(z)$, $\mathfrak{A}_2$ est formé des dénominateurs des exposants aux points singuliers réguliers de L et $\mathfrak{A}_3 = \left\{\frac{a_i(z)}{a_0(z)}\right\}_{1\leq i\leq n}$. Soit d le plus petit commun multiple des dénominateurs des exposants de L en les points singuliers réguliers. On pose $h_1 = \phi(d)$, où ϕ est la fonction indicatrice de Euler, h_2 la dimension du corps de décomposition du polynôme $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}$, et finalement $h = h_1h_2$.

THÉORÈME 3.8. — *Soit $L \in \mathbb{Q}[z][d/dz]$ un opérateur différentiel défini comme en* (2). *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. *Les points singuliers de L sont réguliers, c'est-à dire que L est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers tels que $a_0(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[z]$, tout élément de $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ ait une norme p-adique égale à 1 et tout élément de $\mathfrak{A}_3$ ait une norme de Gauss inférieure ou égale à 1. Alors pour tout $p \in \mathcal{S}$, l'opérateur différentiel a une structure de Frobenius forte de période h.

Dans [11], Crew montre que, sous les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème, si p est un nombre premier tel que L définit un isocristal *surconvergent* et vérifiant certaines autres hypothèses (les conditions C_1 et C_3 dans [11]), alors L a une structure de Frobenius forte pour p. Sa preuve repose sur des outils de cohomologie p-adique et le fait que la surconvergence lui permet (Theorem 1 et Theorem 2 de [11]) de définir la rigidité p-adique en termes de la cohomologie p-adique. Il montre aussi que la période h obtenue ne dépend pas de p. L'intérêt de notre approche est son aspect plus élémentaire puisqu'elle repose sur les aspects classiques de la théorie des équation différentielles (à la fois sur $\mathbb{C}(z)$ et p-adique) et que nous donnons une description précise de l'ensemble des nombres premiers p qui munissent L d'une structure de Frobenius forte.

REMARQUE 3.9. — Comme nous l'avons déjà mentionné, si L est muni d'une structure de Frobenius forte pour p, alors son rayon de convergence au point générique est égal à 1. Cela implique que L définit un isocristal surconvergent. Donc, sous les hypothèses du théorème 3.8, on obtient a posteriori que si $p \in \mathcal{S}$, alors L définit bien un isocristal surconvergent.

4. Démonstration du théorème 2.6

Cette partie est consacrée à l'algebricité modulo p des solutions des équations différentielles possédant une structure de Frobenius forte pour le nombre premier p. Nous démontrons le théorème 2.6.

Rappelons tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{W}_p$ est composé des séries de la forme

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n,$$

dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}_p$ et telles que la famille $\{|a_n|\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée et tend vers 0 lorsque n tend négativement vers l'infini. L'anneau $\mathcal{W}_p$ est complet pour la norme

$$|f| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|.$$

Par construction, E_p est un sous-corps de $\mathcal{W}_p$ et on note ϑ_{E_p} les éléments de E_p dont la norme est inférieure ou égale à 1.

Nous commençons par montrer les deux lemmes suivants.

Lemme 4.1. — *Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de ϑ_{E_p}. Il existe un isomorphisme de corps*

$$\phi : \vartheta_{E_p}/\mathfrak{m} \to \overline{\mathbb{F}}_p(z).$$

Démonstration. — Soient $\vartheta_{\mathbb{C}_p}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal. Soit $x \in \vartheta_{\mathbb{C}_p}$, comme x est la limite d'éléments dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, il existe une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ et $y \in K$ tels que $|x-y| < 1$. Ainsi, $|y| \leq 1$ et dans $\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M}$, $\overline{x} = \overline{y}$. Comme le corps résiduel de K est une extension finie de $\mathbb{F}_p$, on a $\overline{y} \in \overline{\mathbb{F}}_p$. On définit

$$\omega : \vartheta_{\mathbb{C}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$$

par $\omega(x) = \overline{y}$. Notons que $\omega(x)$ ne dépend pas de y et est un homomorphisme d'annaux. D'après le lemme de Hensel, ω est surjectif et si $x \in \mathfrak{M}$, alors $\omega(x) = 0$. Ainsi,

$$\omega : \vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M} \to \overline{\mathbb{F}}_p$$

est un isomorphisme tel que $\omega(\overline{x}) = \overline{x}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. Soit $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{W}_p$ dont la norme est inférieure ou égale à 1. Comme la norme est ultramétrique, $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ est un anneau et, si J désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{W}_p$ dont la norme est strictement inférieure à 1, alors J est un idéal de $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ et le quotient de $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ par J est isomorphe à $\overline{\mathbb{F}}_p((z))$. En effet, soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \in \vartheta_{\mathcal{W}_p}$. Alors, pour tout entier n, $|a_n| \leq 1$ et par définition de l'anneau $\mathcal{W}_p$ il existe un nombre naturel N tel que, pour tout $n < -N$, $|a_n| < 1$. Ainsi, on a

$$\overline{f(z)} := \sum_{n\geq -N} \overline{a_n} z^n \in (\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M})((z)).$$

Considérons l'application $\widetilde{\omega} : \vartheta_{\mathcal{W}_p}/J \to \overline{\mathbb{F}}_p((z))$ définie par

$$\widetilde{\omega}(\overline{f}) = \sum_{n\geq -N} \omega(\overline{a_n}) z^n.$$

Si $f \in \mathbb{Z}_p[[z]]$, alors $\widetilde{\omega}(\overline{f}) = \overline{f}$. Comme ω est un isomorphisme il en est de même pour $\widetilde{\omega}$. Construisons à présent l'isomorphisme ϕ. Comme ϑ_{E_p} est un anneau local et un sous-anneau de $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$, si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de ϑ_{E_p}, alors $\mathfrak{m} \subset J$. Ainsi, $\widetilde{\omega}$ peut se restreindre à $\vartheta_{E_p}/\mathfrak{m}$.

Par construction, si $h \in \vartheta_{E_p}$, $\overline{h} \in (\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M})(z)$, d'où $\overline{h}s = t$, où $s, t \in (\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M})[z]$ sont différents du polynôme nul. Nous pouvons donc définir, $\phi(\overline{h}) = \widetilde{\omega}(t)/\widetilde{\omega}(s) \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$. $\square$

Le lemme suivant est démonstré dans [2, Proposition 6.2] dans le cas où $L = \mathbb{C}$. En utilisant le même argument, on obtient le lemme suivant.

Lemme 4.2. — *Soit K un corps, L une extension de K et $f_1, \dots, f_n \in K[[z]]$. S'il existe des polynômes $a_1(z), \cdots, a_n(z) \in L[z]$, non tous nuls, tels que*

$$a_1(z)f_1 + \cdots + a_n(z)f_n = 0,$$

alors il existe des polynômes $c_1(z), \cdots, c_n(z) \in K[z]$, non tous nuls, tels que

$$c_1(z)f_1 + \cdots + c_n(z)f_n = 0.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.6.

Démonstration du théorème 2.6. — Fixons un nombre premier p. Supposons que A est la matrice compagnon de l'opérateur différentiel

$$L := \frac{d^n}{dz^n} + a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z), \tag{6}$$

où les $a_i(z)$ sont des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Comme A a une structure de Frobenius forte de période h, il existe $H \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - H(p^h z^{p^h-1}A(z^{p^h})).$$

Soit $g \in \mathcal{W}_p$ tel que $Lg = 0$, alors le vecteur $\vec{y} = (g, g', \dots, g^{(n-1)})^T$ est solution du système

$$\frac{d}{dz}Y = AY. \tag{7}$$

Ainsi, le vecteur $\vec{y}(z^{p^h})$ est solution du système

$$\frac{d}{dz}Y = p^h z^{p^h-1}A(z^{p^h})Y.$$

Par conséquent, le vecteur $H\vec{y}(z^{p^h})$ est solution du système (7). Comme $E_p \subset \mathcal{W}_p$, on trouve que $H\vec{y}(z^{p^h})$ est un vecteur à coefficients dans $\mathcal{W}_p$, dont le premier coefficient est une solution de l'équation associéé à l'opérateur (6). Soit $V := \{(g, g', \dots, g^{n-1}) \,:\, g \in \mathcal{W}_p, Lg = 0\}$. Il s'agit d'un $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel. Nous avons donc construit un endomorphisme

$$\begin{aligned} \psi : V &\to V \\ \vec{y} &\mapsto H\vec{y}(z^{p^h}). \end{aligned}$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}_p} V = r \leq n$, le théorème de Cayley-Hamilton assure l'existence de $c_0, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{C}_p$ tels que

$$\psi^r + c_{r-1}\psi^{r-1} + \cdots + c_1\psi + c_0 = 0. \tag{8}$$

Comme par hypothèse $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ et L est annulée par $f(z)$, alors le vecteur $\vec{w} = (f, f', \ldots, f^{(n-1)})$ est dans V. Considérons à présent Z, le E_p-espace vectoriel engendré par les éléments de l'ensemble $\{f^{(j)}(z^{p^{ih}}) : j \in \{0, \ldots, n-1\}, i \in \mathbb{N}\}$. L'égalité (8) montre que Z a pour dimension au plus nr. Comme $f(z), \ldots, f(z^{p^{nrh}}) \in Z$, il existe $j \leq nr$ et $b_0, \ldots, b_j \in E_p$ tels que

$$b_j f(z^{p^{jh}}) + b_{j-1} f(z^{p^{(j-1)h}}) + \cdots + b_0 f(z) = 0.$$

Soit b_l tel que $|b_l| = \max\{|b_0(z)|, \ldots, |b_j(z)|\}$ et soit $c_i(z) = b_i(z)/b_l(z)$. Alors, pour tout $i \in \{0, \ldots, j\}$, $|c_i| \leq 1$ et

$$c_j f(z^{p^{jh}}) + c_{j-1} f(z^{p^{(j-1)h}}) + \cdots + c_0 f(z) = 0.$$

On pose $d_i(z) = \overline{c_i(z)}$, alors on a

$$d_j(z)(f_{|p}(z^{p^{jh}})) + d_{j-1}(z)(f_{|p}(z)^{p^{(j-1)h}}) + \cdots + d_0(z) f_{|p}(z) = 0. \tag{9}$$

et $d_0(z), \ldots, d_j(z)$ ne sont toutes nulles car $1 = \max |c_0(z)|, \ldots, |c_j(z)|$. Soient $\widetilde{\omega}$ l'homomorphisme construit dans le lemme 4.1 et $t_i(z) = \widetilde{\omega}(d_i(z))$. Puisque $\widetilde{\omega}$ est un isomorphisme alors $t_0(z), \ldots, t_j(z)$ ne sont pas toutes nulles. Comme $\widetilde{\omega}(f_{|p}) = f_{|p}$ car $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, alors (9) implique que

$$t_j(z)(f_{|p}(z^{p^{jh}})) + t_{j-1}(z)(f_{|p}(z^{p^{(j-1)h}})) + \cdots + t_0(z) f_{|p}(z) = 0.$$

Finalement, le lemme 4.2 assure l'existence des polynômes $r_0(z), \ldots, r_j(z) \in \mathbb{F}_p(z)$, non tous nuls, tels que

$$r_j(z)(f_{|p}(z)^{p^{jh}}) + r_{j-1}(z)(f_{|p}(z^{p^{(j-1)h}})) + \cdots + r_0(z) f_{|p}(z) = 0.$$

Comme les coefficients de $f_{|p}(z)$ sont dans $\mathbb{F}_p$, la dernière expression devient

$$r_j(z)(f_{|p}(z))^{p^{jh}} + r_{j-1}(z)(f_{|p}(z))^{p^{(j-1)h}} + \cdots + r_0(z) f_{|p}(z) = 0.$$

Et puisque $j \leq nr \leq n^2$, nous obtenons que le degré de $f_{|p}$ sur $\mathbb{F}_p(z)$ est majoré par $p^{n^2 h}$, comme souhaité. □

Remarque 4.3. — La démonstration montre plus précisément que le degré d'algébricité de $f_{|p}(z)$ est borné par p^{nrh}, où r désigne la dimension du $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel V.

5. Démonstration du théorème 3.8

Nous rappelons que $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ est l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{C}_p$ choisi dans la remarque 2.1. À présent, nous présentons les différentes étapes de la démonstration du théorème 3.8. Celles-ci seront démontrées dans la partie 5.3.

Premier pas. — Le premier pas est consacré au calcul des groupes de monodromie locale de L à conjugaison près. Plus précisément, soit A la matrice compagnon de L et soient $\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_r = \infty$ les points singuliers réguliers de L. Pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, soit $M(A, \gamma_j)$ la matrice de monodromie locale de A en γ_j. À l'aide du lemme 3.6 nous allons montrer qu'elle est conjuguée à une matrice de la forme $\exp(2\pi i C_j)$, où $C_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisfait aux conditions suivantes :

(a) Si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C_j, alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$.
(b) L'ensemble des exposants de L en γ_j et l'ensemble des valeurs propres de C_j sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.

Deuxième pas. — Nous montrerons que pour $p \in \mathcal{S}$ et tout $j \in \{1, \dots, r\}$, les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Nous rappelons que l'ensemble de nombres premiers $\mathcal{S}$ et l'entier h sont définis comme dans le théorème 3.8.

Troisième pas. — Nous montrerons que pour tout $p \in \mathcal{S}$, la matrice $B = p^h z^{p^h - 1} A(z^{p^h})$ est E_p-équivalente à la matrice A. La matrice B est dans $\mathcal{M}_n(E_p)$. La démonstration de ce troisième pas se décompose selon les 3 étapes suivantes :

(i) Soit m entier strictement positif tel que $-m$ n'est pas une singularité de L. Nous montrerons que B est E_p-équivalente à

$$G = \frac{\gamma_1 + m}{(z+m)(z-\gamma_1)} F_1 + \cdots + \frac{\gamma_{r-1} + m}{(z+m)(z-\gamma_{r-1})} F_{r-1} - \frac{1}{z+m} F_r,$$

où $F_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p)$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$.

Dans la démonstration de **(ii)** nous utiliserons un isomorphisme de corps $\kappa : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$. L'isomorphisme κ s'étend naturellement en un isomorphisme de corps entre $\mathbb{C}_p(z)$ et $\mathbb{C}(z)$, que nous notons encore $\kappa : \mathbb{C}_p(z) \to \mathbb{C}(z)$. La matrice $M^\kappa \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ désigne la matrice que l'on obtient en appliquant κ à chaque entrée de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p(z))$.

(ii) Nous montrerons d'une part que la matrice de monodromie locale de G^κ en $\kappa(\gamma_j)$, $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$, est conjuguée à la matrice $\exp(2\pi i p^h C_j)$. D'autre part, nous prouvons que la matrice de monodromie locale en $-m$ est l'identité.

D'après le deuxième pas, les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Ainsi, il découle du premier pas que pour $j \in \{1, \dots, r\}$, les matrices $M(A, \gamma_j)$ et $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$ sont conjuguées.

(iii) Comme la monodromie de $\frac{d}{dz} y = Ay$ est rigide, les conjugaisons des matrices $M(A, \gamma_j)$ et $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$ entraînent qu'il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(A, \gamma_j) = U M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j)) U^{-1}$ pour $1 \le j \le r$. Il suit donc que les groupes de monodromie des systèmes $Ay = \frac{d}{dz} y$ et $G^\kappa y = \frac{d}{dz} y$ sont isomorphes. D'après la correspondance de Riemann Hilbert, théorème 6.15

de [21], on obtient qu'il existe $H_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H_1 = AH_1 - H_1G^{\kappa}.$$

On pose $H = H_1^{\kappa^{-1}}$, ainsi $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p(z)) \subset \mathrm{GL}_n(E_p)$ et

$$\frac{d}{dz}H = A^{\kappa^{-1}}H - HG.$$

Remarquons que $A^{\kappa^{-1}} = A$ car A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$. Par conséquent, A et G sont E_p-équivalentes. Or, d'après **(i)**, on sait que G est E_p-équivalente à B. Par transitivité on conclut que A et B sont E_p-équivalentes.

5.1. Disque non singulier et singulier régulier. — Dans cette partie nous énonçons et démontrons le théorème 5.1 ci-dessous. Ce résultat nous permettra dans la démonstration du théorème 3.8 de passer de la théorie des équations différentielles p-adiques à la théorie des équations différentielles classiques.

Pour tout $\gamma \in \mathbb{C}_p$, nous désignons par D_γ le disque ouvert de centre γ et de rayon 1 et par D_∞ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ dont la norme est strictement supérieure à 1 et $\infty \in D_\infty$. Nous notons $\vartheta_{\mathbb{C}_p}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ dont la norme est inférieure ou égale à 1 et si $\alpha, \gamma \in \vartheta_{\mathbb{C}_p}$ alors $D_\alpha = D_\gamma$ si, et seulement si $|\alpha - \gamma| < 1$. Et, $D_\alpha \cap D_\gamma = \emptyset$ si, et seulement si $|\alpha - \gamma| = 1$. Nous notons $E(D_\gamma)$ le complété pour la norme de Gauss des fractions rationnelles qui n'ont pas de pôle dans la boule D_γ.

Pour énoncer le théorème 5.1 nous aurons besoin de rappeler quelques notions de la théorie des équations différentielles p-adiques. Pour cela nous reprenons l'exposition de [7].

Soient $A \in \mathcal{M}_n(E_p)$ et $\gamma \in \vartheta_{\mathbb{C}_p}$. Nous dirons que la matrice A est *non singulière dans le disque* D_γ, respectivement à l'infini, s'il existe une matrice A_γ, respectivement A_∞, E_p-équivalente à A et qui appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$, respectivement à $z^2\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$. Nous dirons que la matrice A est *singulière régulière dans le disque* D_γ, respectivement à l'infini, s'il existe un point β de D_γ et une matrice A_γ, respectivement A_∞, E_p-équivalente à A tels que $(z-\beta)A_\gamma$ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$, respectivement zA_∞ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$.

Théorème 5.1. — *Soient $B \in \mathcal{M}_n(E_p)$ et $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}\} \subset \vartheta_{\mathbb{C}_p}$ tel que pour tout $i \neq j$, $|\gamma_i - \gamma_j|_p = 1$. Supposons que pour tout $\gamma \in S \cup \{\infty\}$, la matrice B est singulière régulière dans le disque D_γ et que pour tout $\gamma \notin S \cup \{\infty\}$ la matrice B est non singulière dans le disque D_γ. Soit m un entier strictement positif tel que $-m \notin S$. Pour tout $\gamma \in S$, soient β_γ un point de D_γ et B_γ une matrice E_p-équivalente à B tels que $(z-\beta_\gamma)B_\gamma$ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$. Soit B_∞ une matrice E_p-équivalente à B, telle que zB_∞ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$.*

Alors B est E_p-équivalente à une matrice G de la forme

$$G = \frac{\beta_{\gamma_1}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_1})}G_1 + \cdots + \frac{\beta_{\gamma_{r-1}}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_{r-1}})}G_{r-1} - \frac{1}{z+m}G_r, \tag{10}$$

où, pour $j \in \{1,\dots,r-1\}$, G_j est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ semblable à $[(z-\beta_\gamma)B_\gamma](\beta_\gamma)$, G_r est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ semblable à $[-zB_\infty](\infty)$ et $\sum_{\gamma\in S\cup\{\infty\}} G_\gamma$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Le théorème 5.1 est démontré dans [7, théorème 4.2] dans le cas où le disque D_∞ est non singulier.

Démonstration. — Considérons la matrice

$$V = -\frac{1}{z^2}B\left(\frac{1-zm}{z}\right),$$

obtenue en appliquant le changement de variables $z \mapsto \frac{1-zm}{z}$ au système $By = \frac{d}{dz}y$. Le disque D_∞ est non singulier pour la matrice V car le disque D_{-m} est non singulier pour la matrice B. Ainsi nous ramenons toutes les singularités à distance finie. Posons pour $j \in \{1,\dots,r-1\}$, $\tau_j = 1/(\beta_{\gamma_j}+m)$ et $\tau_r = 0$. Notons que pour $j \in \{1,\dots,r-1\}$, $|\beta_{\gamma_j}+m|_p = 1$ car D_{-m} est un disque non singulier pour la matrice B. Considérons l'ensemble $S' = \{\tau_1,\dots,\tau_{r-1},0\}$. Nous allons appliquer le théorème 4.2 de [7] à la matrice V et à l'ensemble S'. Nous allons donc montrer que V et S' satisfont aux hypothèses du théorème 4.2 de [7]. D'après le changement de variables choisi, il nous reste à vérifier que :

1. $|\tau_i - \tau_j| = 1$ pour $i \neq j$;
2. Soit η tel que $|\eta| \leq 1$ et $|\tau_i - \eta| = 1$ pour $i \in \{1,\dots,r\}$. Alors V est non singulière dans le disque D_η ;
3. Les disques singuliers réguliers de V sont exactement les disques D_{τ_j}, $1 \leq j \leq r-1$, et D_0.

Preuve du point 1. On a

$$\tau_i - \tau_j = \frac{1}{\beta_{\gamma_i}+m} - \frac{1}{\beta_{\gamma_j}+m} = \frac{\beta_{\gamma_j}-\beta_{\gamma_i}}{(\beta_{\gamma_i}+m)(\beta\gamma_j+m)}.$$

Par hypothèse $|\gamma_j - \gamma_i| = 1$ alors $|\beta_{\gamma_i} - \beta_{\gamma_j}| = 1$ et on a déjà vu que $|(\beta_{\gamma_j}+m)| = 1$ pour $j \in \{1,\dots,r-1\}$, d'où $|(\beta_{\gamma_i}+m)(\gamma_j+m)| = 1$. Ainsi $|\tau_i - \tau_j| = 1$.

Preuve du point 2. Comme $|\tau_i - \eta| = 1$ pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, alors on a $|\eta| = 1$ car $\tau_r = 0$. Supposons que V est singulière dans le disque D_η, alors la matrice B est singulière dans le disque $D_{\frac{1-\eta m}{\eta}}$. Donc, il existe $i \in \{1,\dots,r-1\}$ tel que

$$\overline{\beta_{\gamma_i}} = \overline{\left(\frac{1-\eta m}{\eta}\right)}$$

et comme $\beta\gamma_i = \frac{1-\tau_i m}{\tau_i}$ il suit que

$$\overline{\left(\frac{1-\eta m}{\eta}\right)} = \overline{\left(\frac{1-\tau_i m}{\tau_i}\right)}.$$

Ainsi, on a $\overline{\eta} = \overline{\tau_i}$. Autrement dit $|\tau_i - \eta| < 1$, ce qui est une contradiction.

Preuve du point 3. Par hypothèse pour chaque $j \in \{1, \dots, r-1\}$, la matrice B est E_p-équivalentes à B_{γ_j}, où $(z-\beta_{\gamma_j})B_{\gamma_j}$ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$. Ainsi, $B_{\gamma_j} = \frac{1}{z-\beta_{\gamma_j}} H_{\gamma_j}$, où H_{γ_j} appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$. Montrons que V est E_p-équivalente à

$$V_j = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z(m+\beta_{\gamma_j})} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right).$$

En effet, on sait qu'il existe $G_j \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz} G_j = BG_j - G_j B_{\gamma_j}.$$

On pose $T_j := G_j\left(\frac{1-zm}{z}\right) \in \mathrm{GL}_n(E_p)$, donc en appliquant la dérivée d'une composition on obtient que

(11)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} T_j &= \left[B\left(\frac{1-zm}{z}\right) G_j\left(\frac{1-zm}{z}\right) - G_j\left(\frac{1-zm}{z}\right) B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)\right]\left(\frac{-1}{z^2}\right)\\ &= VT_j - T_j \cdot \left(\left(\frac{-1}{z^2}\right) B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)\right).\end{aligned}$$

Mais $B_{\gamma_j} = \frac{1}{z-\beta_{\gamma_j}} H_{\gamma_j}$ entraîne que $B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right) = \frac{z}{1-z(m+\beta_{\gamma_j})} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)$, d'où $\left(\frac{-1}{z^2}\right) B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right) = V_j$ et ainsi

$$\frac{d}{dz} T_j = VT_j - T_j V_j.$$

Donc V et V_j sont E_p-équivalentes.

Comme $m + \beta_{\gamma_j} = 1/\tau_j$ pour $1 \le i \le j-1$, il vient que

$$V_j = -\frac{1}{z} \cdot \frac{\tau_j}{\tau_j - z} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right). \tag{12}$$

Enfin, comme B est E_p-équivalente à B_∞, où $B_\infty = \frac{1}{z} H_\infty$ avec H_∞ dans $\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$ alors V est E_p-équivalente à

$$V_\infty := -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-zm} H_\infty\left(\left(\frac{1-zm}{z}\right)\right). \tag{13}$$

Pour finir, montrons que, pour tout $j \in \{1, \dots, r-1\}$, la matrice $(z-\tau_j)V_j$ est non singulière dans le disque D_{τ_j}. En effet, d'après (12), $(z-\tau_j)V_j = \frac{\tau_j}{z} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)$. Soit $y \in D_{\tau_j}$, alors $\frac{1-ym}{y} \in D_{\gamma_j}$ et par conséquent, la matrice $H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)$ n'a pas de pôle en y car H_{γ_j} appartient à $M(E(D_{\gamma_j}))$. Donc la

matrice $(z-\tau_j)V_j$ est non singulière dans le disque D_{τ_j}. De manière similaire, on montre que la matrice zV_∞ est non singulière dans le disque D_0.

Par conséquent, le théorème 4.2 de [7] montre que V est E_p-équivalente à la matrice

$$F=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{z-\tau_j}G_j, \tag{14}$$

où, pour tout $j\in\{1,\dots,r-1\}$, G_j est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ semblable à $[(z-\tau_j)V_j)](\tau_j)$, G_r est semblable à $(zV_r)(0)$ et $\sum_{i=1}^{r}G_j$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De (12) et (13) il suit que

$$[(z-\tau_j)V_j)](\tau_j)=H_{\gamma_j}(\gamma_j)\quad\text{et}\quad(zV_\infty)(0)=-H_\infty(\infty). \tag{15}$$

En particulier, le théorème 4.2 de [7] montre qu'il existe $T\in\mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}T=VT-TF.$$

En posant $H_2=T\left(\frac{1}{z+m}\right)$, on a $H_2\in\mathrm{GL}_n(E_p)$ et

(16)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}H_2&=\left[V\left(\frac{1}{z+m}\right)T\left(\frac{1}{z+m}\right)-T\left(\frac{1}{z+m}\right)F\left(\frac{1}{z+m}\right)\right]\left(\frac{-1}{(z+m)^2}\right)\\&=\left[-(z+m)^2BH_2-H_2F\left(\frac{1}{z+m}\right)\right]\left(\frac{-1}{(z+m)^2}\right)\\&=BH_2-H_2\cdot\left(\frac{-1}{(z+m)^2}F\left(\frac{1}{z+m}\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, B est E_p-équivalente à $G:=-\frac{1}{(z+m)^2}F(\frac{1}{z+m})$. Comme $\tau_j=1/(\beta_{\gamma_i}+m)$, l'égalité (14) donne que

$$G=\frac{\beta_{\gamma_1}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_1})}G_1+\cdots+\frac{\beta_{\gamma_{r-1}}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_{r-1}})}G_{r-1}-\frac{1}{z+m}G_r.$$

Finalement, d'après (15), G_j est semblable à $H_{\gamma_j}(\gamma_j)$ mais, $H_{\gamma_j}(\gamma_j)=[(z-\beta_{\gamma_j})B_{\gamma_j}](\beta_{\gamma_j})$ donc, G_j est semblable à $[(z-\beta_{\gamma_j})B_{\gamma_j}](\beta_{\gamma_j})$. Encore par (15), la matrice G_r est semblable à $-H_\infty(\infty)$, mais $H_\infty(\infty)=[zB_\infty](\infty)$ alors $-H_\infty(\infty)$ est est semblable $[zB_\infty](\infty)$. □

Remarque 5.2. — Il suit de la démonstration du théorème 4.2 de [7] que, l'infini est une singularité régulière apparente de F. Alors, $-m$ est une singularité régulière apparente de G et par conséquente, G a une base de solutions à coefficients dans $\mathbb{C}_p((z+m))$.

5.2. Lemmes préparatoires. — Afin de démontrer les trois pas précédents, nous aurons besoin des lemmes préparatoires suivants.

Le premier lemme est un résultat qui semble classique mais nous utiliserons les idées de la preuve dans la démonstration du théorème 3.8. On pose

$$L = \frac{d^n}{dz^n} + a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz], \tag{17}$$

Lemme 5.3. — *Considérons l'opérateur différentiel* (17) *et soit A la matrice compagnon associée à L. Si $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ est un point singulier régulier de L, alors il existe $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que :*

1. *Les matrices A et $\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma$ sont $\mathbb{Q}(\gamma)(z)$-équivalentes. Et si γ est l'infini alors A et $\frac{-1}{z}A_\infty$ sont $\mathbb{Q}(z)$-équivalentes.*
2. *A_γ n'a pas de pôle en γ ;*
3. *Les valeurs propres de $A_\gamma(\gamma)$ sont les exposants de l'équation en γ.*

Remarque 5.4. — Ce lemme est encore valide quand $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$, mais dans ce cas nous pouvons seulement affirmer que A et $\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma$ sont $\mathbb{C}(z)$-équivalentes et il en va de même pour l'infini. En particulier si L est fuchsien alors le système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$ est fuchsien.

Démonstration. — Notons que $z^n\frac{d^n}{dz^n} = \delta(\delta-1)\cdots(\delta+n-1)$, où $\delta = z\frac{d}{dz}$. Ainsi, il existe $a_{1j}, \ldots, a_{jj} \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{d^j}{dz^j} = \frac{a_{1j}}{z^j}\delta + \cdots + \frac{a_{jj}}{z^j}\delta^j$. Soit

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{1}{z^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{a_{1,n-1}}{z^{n-1}} & \frac{a_{2,n-1}}{z^{n-1}} & \frac{a_{3,n-1}}{z^{n-1}} & \ldots & \frac{a_{n-2,n-1}}{z^{n-1}} & \frac{1}{z^{n-1}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[1/z])$$

la matrice exprimant $\{1, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\}$ en fonction de $\{1, \delta, \ldots, \delta^{n-1}\}$.

Soit γ un point singulier régulier de L. Nous commençons par considérer un nouvel opérateur

$$L_\gamma := \frac{d^n}{dz^n} + a_1(z+\gamma)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z+\gamma)\frac{d}{dz}y + a_n(z+\gamma)$$

que l'on écrit sous la forme

$$\delta^n + q_1(z)\delta^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(z)\delta + q_n(z), \tag{18}$$

où $\delta = z\frac{d}{dz}$ et

$$(q_n(z), \ldots, q_1(z), 1) = (a_n(z+\gamma), \ldots, a_1(z+\gamma), 1)z^n G_{n+1}. \tag{19}$$

On rappelle que les exposants de (17) en γ sont les zéros du polynôme

$$\lambda^n + q_1(0)\lambda^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(0)\lambda + q_n(0),$$

où $q_n(z), \ldots, q_1(z)$ sont définis dans (19).

Notons que $q_i(z) \in \mathbb{Q}(\gamma)(z)$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit

$$B_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -q_n(z) & -q_{n-1}(z) & \dots & -q_2(z) & -q_1(z) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Fuchs, B_γ n'a pas de pôle en zéro. Montrons que les valeurs propres de $B_\gamma(0)$ sont les exposants en γ. En effet, le polynôme caractéristique de $B_\gamma(0)$ est $(-1)^n(\lambda^n + q_1(0)\lambda^{n-1} + \cdots + q_{n-1}\lambda + q_n(0))$. Posons

$$A_\gamma = B_\gamma(z-\gamma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(\gamma)(z)). \tag{20}$$

Alors, A_γ n'a pas de pôle en γ et les valeurs propres de $A_\gamma(\gamma)$ sont les exposants en γ. Ainsi, elle appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}\{z-\gamma\})$. Donc A_γ satisfait aux points 2 et 3 du lemme 5.3. Montrons qu'elle satisfait aussi le point 1.

Soit C_γ la matrice compagnon associée à l'équation L_γ. Montrons que

$$\frac{d}{dz}G_n = C_\gamma G_n - G_n \frac{1}{z} B_\gamma.$$

Soit f une solution quelconque de L_γ. On pose $(\mathbf{d}f) = (f, f', \dots, f^{(n-1)})^t$ et $(\boldsymbol{\delta} f) = (f, \delta f, \dots, \delta^{(n-1)} f)^t$. Alors, $\frac{d}{dz}(\mathbf{d}f) = C_\gamma(\mathbf{d}f)$ et $\delta(\boldsymbol{\delta} f) = B_\gamma(\boldsymbol{\delta} f)$. D'après la construction de la matrice G_n, nous avons que $(\mathbf{d}f) = G_n(\boldsymbol{\delta} f)$. En appliquant d/dz à cette dernière égalité, on a que

$$C_\gamma(\mathbf{d}f) = \left(\frac{d}{dz}G_n\right)(\boldsymbol{\delta} f) + G_n \frac{d}{dz}(\boldsymbol{\delta} f) = \left(\frac{d}{dz}G_n\right)(\boldsymbol{\delta} f) + G_n \frac{1}{z}\delta(\boldsymbol{\delta} f).$$

Mais $(\mathbf{d}f) = G_n(\boldsymbol{\delta} f)$ et $\delta(\boldsymbol{\delta} f) = B_\gamma(\boldsymbol{\delta} f)$. Donc,

$$C_\gamma G_n(\boldsymbol{\delta} f) = \left(\frac{d}{dz}G_n\right)(\boldsymbol{\delta} f) + G_n \frac{1}{z} B_\gamma(\boldsymbol{\delta} f).$$

Finalement, comme f est une solution quelconque de L_γ et que l'espace des solutions de L_γ est de dimension n sur $\mathbb{C}$, on obtient que

$$C_\gamma G_n = \frac{d}{dz}G_n + G_n \frac{1}{z} B_\gamma.$$

Notons que $A = C_\gamma(z-\gamma)$, alors en posant $H_\gamma := G_n(z-\gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(\gamma)(z))$, il vient

$$\frac{d}{dz}H_\gamma = AH_\gamma - H_\gamma \frac{1}{z-\gamma} A_\gamma.$$

Pour l'infini, considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^n}{dz^n}y + b_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}y + \cdots + b_{n-1}(z)\frac{d}{dz}y + b_n(z)y = 0, \tag{21}$$

où $(b_n(z),\dots,b_1(z),1)=(a_n(1/z),\dots,a_1(1/z),1)\frac{(-1)^n}{z^{2n}}W_n$ et

$$W_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & 0\\ 0 & -z^2 & 0 & 0\dots & 0 & 0\\ 0 & 2z^3 & z^4 & 0\dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\dots & \vdots & \vdots\\ 0 & * & * & *\dots & * & (-z^2)^n\end{pmatrix}$$

qui est la matrice qui exprime le vecteur $(1,D,\dots,D^n)$ en fonction de $(1,\frac{d}{dz},\dots,\frac{d}{dz^n})$, où $D=-z^2\frac{d}{dz}$.

Comme l'infini est singulier régulier, alors zéro est un point singulier régulier de (21) et par définition les exposants à l'infini de (17) sont les exposants en zéro de (21). Notons $\widetilde{A}$ la matrice compagnon de (21). Il existe une matrice $\widetilde{A}_0$ qui n'a pas de pôle en zéro, les valeurs propres de $\widetilde{A}_0(0)$ sont les exposant en zéro de (21) et $\frac{1}{z}\widetilde{A}_0$ et $\widetilde{A}$ sont $\mathbb{Q}(z)$-équivalentes. Alors il existe $\widetilde{H}_0\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}\widetilde{H}_0=\frac{1}{z}\widetilde{A}_0\widetilde{H}_0-\widetilde{H}_0\widetilde{A}.$$

Ainsi, si $\widetilde{G}=\widetilde{H}_0(1/z)\in\mathbb{Q}(z)$ on a

$$\frac{d}{dz}\widetilde{G}=-\frac{1}{z}\widetilde{A}_0(1/z)\widetilde{G}-\widetilde{G}\cdot\left(\frac{-1}{z^2}\widetilde{A}(1/z)\right).$$

Soit f un solution de L et soit $g=f(1/z)$, on pose $(\mathbf{d}f)=(f,f',\dots,f^{(n-1)})^t$, $(\mathbf{d}g)=(g,g',\dots,g^{(n-1)})^t$. À l'aide des égalités $\mathbf{d}f=(W_n\mathbf{d}g)(1/z)$, $\frac{d}{dz}(\mathbf{d}f)=A\mathbf{d}f$ et $\frac{d}{dz}(\mathbf{d}g)=\widetilde{A}\mathbf{d}g$, on obtient que

$$\frac{d}{dz}W_n=-(\frac{1}{z^2}A(1/z))W_n-W_n\widetilde{A}.$$

Posons $T_\infty=W_n(1/z)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$, il vient donc

$$\frac{d}{dz}T_\infty=A(z)T_\infty-T_\infty\left(\frac{-1}{z^2}\widetilde{A}(1/z)\right).$$

Maintenant, en posant $H_\infty=\widetilde{G}T_\infty^{-1}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$, il vient

$$\frac{d}{dz}H_\infty=-\frac{1}{z}\widetilde{A}_0(1/z)H_\infty-H_\infty A.$$

Par conséquent, les matrices A et $-\frac{1}{z}\widetilde{A}_0(1/z)$ sont $\mathbb{Q}(z)$-équivalentes. On pose $A_\infty=\widetilde{A}_0(1/z)$, ainsi la matrice A_∞ satisfait aux conditions demandées. □

Notons que pour tout nombre premier p, γ appartient à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, car il annule un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}_p$. La démonstration précédente montre que $A_\gamma,H_\gamma\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(\gamma)(z))$ et $A_\infty,H_\infty\in$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})(z)$, notamment $A_\gamma, H_\gamma \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ et ainsi les matrices A, $\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma$ sont E_p-équivalentes. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.5. — *Soient $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$, A, $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}} \in \{\infty\}$ comme dans le lemme 5.3.*

1. *Soit p un nombre premier tel que le disque $D_\gamma \subset \mathbb{C}_p$ ne contient pas d'autres points singulier de L. Alors le disque D_γ est non singulier pour A_γ.*
2. *Soit p un nombre premier tel que tous les points singuliers de L à distance finie ont norme p-adique égale à 1. Supposons que l'infini est un point singulier régulier de L. Alors le disque D_∞ est non singulier pour la matrice A_∞.*
3. *Soit p un nombre premier tel que $\|A\|_p \leq 1$ et $|\gamma|_p = 1$, alors $\|A_\gamma\|_{p,} \leq 1$ et $\|\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$.*

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(E_p)$, $\|A\|_{\mathcal{G},p} = Max(|a_{ij}|_{\mathcal{G},p})$.

Démonstration. — Avec les notations de la preuve du lemme 5.3, l'équation (20) donne que

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -q_n(z-\gamma) & -q_{n-1}(z-\gamma) & \dots & -q_2(z-\gamma) & -q_1(z-\gamma) \end{pmatrix}.$$

et de (19) on a que

$$(q_n(z-\gamma), \dots, q_1(z-\gamma), 1) = (a_n(z), \dots, a_1(z), 1)(z-\gamma)^n G_{n+1}(z-\gamma). \tag{22}$$

Notons que $(z-\gamma)^n G_{n+1}(z-\gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[z-\gamma])$.

1. Cela revient à montrer que $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$, c'est-à-dire que A_γ n'a pas de pôle en D_γ. En effet, soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ une singularité de A_γ. D'après le lemme 5.3, on a $\alpha \neq \gamma$ car A_γ n'a pas de pôle en γ. L'équation (22) donne que α est une singularité de A et d'après l'hypothèse, $\alpha \notin D_\gamma$, ainsi $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(D_\gamma)$.
2. Rappelons que $A_\infty = \widetilde{A}_0(1/z)$. Notons que les singularités de (21) sont 0 et $1/\gamma$, avec γ une singularité de L. De l'hypothèse, $|1/\gamma|_p = 1$, ainsi D_0 ne contient pas d'autre point singulier de (21). Alors, du point 1 du corollaire, A_0 est non singulier dans le disque D_0 et ainsi A_∞ est non singulier dans le disque D_∞.

3. D'après l'hypothèse, $\|(a_n(z),\dots,a_1(z),1)\|_{\mathcal{G},p}\le 1$, $\|(z-\gamma)\|_{\mathcal{G},p}=1$ et notons que

$$G_{n+1}(z-\gamma)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{z-\gamma} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{(z-\gamma)^2} & \frac{1}{(z-\gamma)^2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & \frac{a_{1,n}}{(z-\gamma)^n} & \frac{a_{2,n}}{(z-\gamma)^n} & \frac{a_{3,n}}{(z-\gamma)^n} & \dots & \frac{a_{n-1,n}}{(z-\gamma)^n} & \frac{1}{(z-\gamma)^n}\end{pmatrix}.$$

Comme les a_{ij} sont entiers, on a $\|G_{n+1}(z-\gamma)\|_{\mathcal{G},p}\le 1$ et l'équation (22) donne

$$\|(q_n(z-\gamma),\dots,q_1(z-\gamma),1)\|_{\mathcal{G},p}\le 1.$$

Ainsi, $\|A_\gamma\|_{\mathcal{G},p}\le 1$. Finalement, comme $\|\frac{1}{z-\gamma}\|_{\mathcal{G},p}=1$, alors

$$\left\|\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma\right\|_{\mathcal{G},p}=\left\|\frac{1}{z-\gamma}\right\|_{\mathcal{G},p}\|A_\gamma\|_{\mathcal{G},p}\le 1. \qquad \square$$

Nous aurons besoin du lemme suivant pour la démonstration du deuxième pas du théorème 3.8.

Lemme 5.6. — *Soient $a_0(z)\in\mathbb{Q}[z]$, K le corps de décomposition de $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}$, h_2 la dimension de K comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et s la valuation de $a_0(z)$. Considérons l'ensemble $\mathcal{S}'$ des nombres premiers tels que le coefficient dominant de $a_0(z)$ et le terme constant du polynôme $a_0(z)/z^s$ aient une norme p-adique égale à 1 et que $a_0(z)\in\mathbb{Z}_{(p)}[z]$. Alors pour tout $p\in\mathcal{S}'$, tout entier $m\ge 1$ et toute racine γ de $a_0(z)$, on a*

$$|\gamma^{p^{mh_2}}-\gamma|_p<\frac{1}{p}<|\pi_p|_p.$$

Remarque 5.7. — Notons que l'ensemble $\mathcal{P}\setminus\mathcal{S}'$ est fini.

Démonstration. — Si $\gamma=0$ il n'a rien à prouver. Supposons donc que $\gamma\neq 0$. Soit $p\in\mathcal{S}'$, alors $a_0(z)\in\mathbb{Z}_p[z]$ car $\mathbb{Z}_{(p)}\subset\mathbb{Z}_p$. Soient K_p le corps de décomposition de $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}_p$ et h_3 la dimension de K_p comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel. Il suit du théorème 6.1 de [14, Chap. I] que les racines non nulles de $a_0(z)$ ont une norme égale à 1. Soit $P(z)=a_0(z)/z^s$. Notons que $P_0(z)\in\mathbb{Z}_{(p)}[z]$. Comme $|P(0)|_p=1$ et toutes les racines de $P(z)$ ont norme égale à 1 alors $P(z)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $\bar{P}(z)$ le polynôme qui est obtenu après avoir réduit les coefficients de $P(z)$ modulo l'idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Comme $P(z)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$ et $P(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ alors le lemme de Hensel nous assure que $\bar{P}(z)$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$. Soient $L=\mathbb{Q}_p(\gamma)$ et $k=\mathbb{F}_p(\bar{\gamma})$. Comme $P(\gamma)=0$ et $P(z)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$ alors $[L:\mathbb{Q}_p]=deg(P(z))$. De même, comme $\bar{P}(\bar{\gamma})=0$ et $\bar{P}(z)$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$ alors $[k:\mathbb{F}_p]=deg(\bar{P}(z))$. Mais, $deg(P(z))=deg(\bar{P}(z))$ et ainsi, $[L:\mathbb{Q}_p]=$

$deg(P(z)) = [k : \mathbb{F}_p]$. Alors, d'après le petit théorème de Fermat, $\gamma^{p^{deg(P(z))}} \equiv \gamma$ mod p. Puisque L est un sous corps de K_p alors $deg(P(z))$ divise h_3 et ainsi, $\gamma^{p^{h_3}} \equiv \gamma \mod p$. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $\gamma^{p^{nh_3}} \equiv \gamma \mod p$. Finalement, comme K est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$, on obtient que $h_2 = h_3 r$, où r est un entier strictement positif. Ainsi, pour tout entier $m \geq 1$, $\gamma^{p^{mh_2}} \equiv \gamma \mod p$. Finalement, on obtient que pour tout entier $m \geq 1$,

$$|\gamma^{p^{mh_2}} - \gamma|_p < \frac{1}{p} < |\pi_p|. \qquad \square$$

L'importance du troisième pas repose sur le fait que nous allons passer de la théorie des équations différentielles p-adiques à la théorie des équations différentielles classiques, et pour cela nous utiliserons le théorème 5.1. Dans un premier temps, nous étudions les disques singuliers réguliers de B. D'après le lemme 5.3, on obtient que B est E_p-équivalente à $\frac{pz^{p-1}}{z^p-\gamma_j} A_{\gamma_j}(z^p)$. De plus, d'après le choix de p, le corollaire 5.5 nous garantit que la matrice $A_{\gamma_j}(z^p)$ est non singulière dans le disque D_{γ_j}. Ainsi, la matrice $(z-\gamma_j)(\frac{1}{z^p-\gamma_j})A_j(z^p)$ a comme singularités les racines p-ième de γ_j qui sont dans D_{γ_j}. Pour surmonter cette difficulté, nous considèrerons la transformation $z \mapsto (z+\gamma_j)^p - \gamma_j$.

Dans l'étude de cette transformation nous devons reprendre la construction de $Frob_{z^p}$ faite dans la partie 2. De manière plus générale, pour $\omega \in E_p$ vérifiant

$$|\omega - z^{p^h}| < 1 \tag{23}$$

pour un certain h, nous construisons $Frob_\omega : E_p \to E_p$ comme suit. Nous définissons $Frob_\omega : \mathbb{C}_p(z) \to E_p$ donné par

$$Frob_\omega\left(\frac{\sum_i a_i z^i}{\sum_j b_j z^j}\right) = \frac{\sum_j Frob(a_i)\omega^i}{\sum_j Frob(b_j)\omega^j},$$

où $(\sum_i a_i z^i)/(\sum_j b_j z^j) \in \mathbb{C}_p(z)$. Remarquons que $\sum_j Frob(b_j)\omega^j \neq 0$ car d'après (23), ω est transcendent. Le Frobenius $Frob_\omega$ est continu car c'est une isométrie (voir le lemme 5.9), il s'étend donc au corps des éléments analytiques E_p, noté encore $Frob_\omega : E_p \to E_p$. De plus, c'est à nouveau une isométrie. Soit A une matrice de taille n à coefficients E_p, on considère la matrice $F_\omega(A) := \frac{d}{dz}(\omega)A^{Frob_\omega}$, où A^{Frob_ω} est la matrice obtenue en appliquant $Frob_\omega$ à chaque entrée de A.

De la proposition 4.1.2 de [8] on sait que si $A \in \mathcal{M}_n(E_p)$ a norme inférieure ou égale à 1 alors le système $Ay = \frac{d}{dz}y$ a une basse de solution dans l'anneau des séries à coefficients dans E_p qui convergent pour $|x| < |\pi_p|$, donc en analogie avec la proposition 4.7.3 de [8], nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 5.8. — *Soit $\omega \in E_p$ tel que $|\omega - z^{p^h}| < |\pi_p|$ et $A \in \mathcal{M}_n(E_p)$ de norme inférieure ou égale à 1. Alors $F_\omega(A)$ et $F_{z^{p^h}}(A)$ sont E_p-équivalentes.*

Nous allons utiliser la proposition 5.8 dans l'étape **(i)** du troisième pas afin de montrer que B est E_p-équivalente à $F_\omega(\frac{1}{z-\gamma_k}A_{\gamma_k})$, avec $\omega = (z+\gamma_j)^{p^h} - \gamma_j$, où $Frob(\gamma_k) = \gamma_j$.

Un des points importants de la démonstration de la proposition 4.7.3 de [8] est que $Frob_{z^{p^h}}$ est une isométrie. Pour appliquer la proposition 5.8 nous devons montrer que $Frob_\omega$ est une isométrie. Nous démontrons cela dans le lemme suivant.

Lemme 5.9. — *Soit h un entier strictement positif et $\omega \in E_p$ tels que $|\omega - z^{p^h}| < 1$. Alors, il existe un endomorphisme isométrique, $Frob_\omega : E_p \to E_p$ tel que $Frob_\omega(z) = \omega$. De plus, pour tout e dans E_p, on a*

$$\frac{d}{dz}(Frob_\omega(e)) = \frac{d}{dz}(\omega)Frob_\omega\left(\frac{d}{dz}e\right).$$

Démonstration. — Soit $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ l'automorphisme de Frobenius choisi dans la remarque 2.1. On a $\overline{\omega} = \overline{z}^{p^h}$ et $|\omega| = 1$. Définissons $Frob_\omega : \mathbb{C}_p(z) \to E_p$ de la manière suivante. Étant donnés $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ et $Q(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j \in \mathbb{C}_p[z]$, on pose

$$Frob_\omega\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{\sum_{i=0}^n Frob(a_i)\omega^i}{\sum_{j=0}^m Frob(b_j)\omega^j}.$$

Notons que $\sum_{j=0}^m Frob(b_j)\omega^j \neq 0$ car ω est transcendant sur K. Montrons que $Frob_\omega$ est une isométrie. Soient $l \in \{0,\dots,n\}$ et $k \in \{0,\dots,m\}$ tels que $|a_l| = |P|$ et $|b_k| = |Q|$. Alors $P = a_l P_1$ et $Q = b_k Q_1$ avec $P_1 = \sum_{i=0}^n c_i z^i$ où $c_i = \frac{a_i}{a_l}$, $Q_1 = \sum_{j=0}^m d_j z^j$ et $d_j = \frac{b_j}{b_k}$. On pose $R = \frac{P_1}{Q_1}$.

Ainsi, on a $|P_1| = 1 = |Q_1|$, $|R| = 1$ et

$$\overline{Frob_\omega(R)} = \left(\frac{\overline{\sum_i c_i^p z^{ip^h}}}{\overline{\sum_j d_j^p z^{jp^h}}}\right) = \left(\frac{\overline{\sum_i c_i z^{ip^{h-1}}}}{\overline{\sum_j d_j z^{jp^{h-1}}}}\right)^p = \overline{R(z^{p^{h-1}})}^p. \tag{24}$$

On obtient que

$$|Frob_\omega(R) - (R(z^{p^{h-1}}))^p| < 1,$$

et comme $|R(z^{p^h-1})| = 1$, alors $|Frob_\omega(R)| = 1$ et $|Frob_\omega(P/Q)| = |P/Q|$.

Donc $Frob_\omega : \mathbb{C}_p(z) \to E_p$ est continue et isométrique. Elle peut se prolonger de manière unique au corps E_p en un endomorphisme isométrique. De la contruction de $Frob_\omega$ et de la dérivation de la composée, il suit que pour toute fraction rationnelle $P/Q \in \mathbb{C}_p(z)$, on a

$$\frac{d}{dz}(Frob_\omega(P/Q)) = \frac{d}{dz}(\omega)Frob_\omega\left(\frac{d}{dz}(P/Q)\right).$$

Comme $Frob_\omega$ et $\frac{d}{dz}$ sont continues, on obtient que, pour tout $e \in E_p$, on a

$$\frac{d}{dz}(Frob_\omega(e)) = \frac{d}{dz}(\omega) Frob_\omega\left(\frac{d}{dz}e\right). \qquad \square$$

5.3. Démonstration des pas. — Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 3.8.

Démonstration du premier pas. — Soient $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{r-1}, \gamma_r = \infty$ les points singuliers de L et A sa matrice compagnon. D'après le lemme 5.3, on a que γ_j est un point singulier régulier du système $\frac{d}{dz}y = Ay$. Ainsi, d'après le lemme 3.6, il existe $C_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(A, \gamma_j)$ est conjuguée à $\exp(2\pi i C_j)$, où, si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C_j alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$ et si α_{ij} est un exposant de $\frac{d}{dz}y = Ay$ en γ_j alors il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + m$ est une valeur propre de C. Mais, toujours d'après le lemme 5.3, les exposants de $\frac{d}{dz}y = Ay$ en γ_j sont les exposants de L en γ_j. Ainsi, C_j satisfait aux conditions **(a)** et **(b)** du premier pas. $\square$

Remarque 5.10. — D'après le lemme 5.3, nous pouvons réécrire le point **(b)** comme suit : l'ensemble des valeurs propres de $A_j(\gamma_j)$ et l'ensemble des valeurs propres de C_j sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des nombres algébriques formé par les points $\gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$, les différences $\gamma_i - \gamma_j$, $i \neq j$, et les dénominateurs des exposants des points $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Si $p \in \mathcal{S}$, alors les éléments de $\mathfrak{A}$ ont tous une norme p-adique égale à 1. En effet, comme $p \in \mathcal{S}$ et $\gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$ sont les racines non nulles de $a_0(z)$ alors, d'après le théorème 6.1 de [14, Chap. I], leurs normes p-adique sont égales à 1. Le discriminant de $a_0(z)$ est donnée par $\prod_{i \neq j}(\gamma_i - \gamma_j)^2$. Si $p \in \mathcal{S}$, on a donc que $|\prod_{i \neq j}(\gamma_i - \gamma_j)^2|_p = 1$. De plus, comme la norme est ultramétrique, on obtient que $|\gamma_i - \gamma_j|_p \leq 1$ pour $i \neq j$. On en déduit donc que $|\gamma_i - \gamma_j|_p = 1$ pour $i \neq j$. Rappelons enfin que si $p \in \mathcal{S}$, alors $\|A\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$.

Désignons par $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{n,j}$ les exposants de L en γ_j. Notons d le plus petit commun multiple des dénominateurs des $\alpha_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$. Rappelons que $h_1 = \phi(d)$. On sait que si $p \in \mathcal{S}$, on a $|d|_p = 1$. Donc, p et d sont premiers entre eux et $p^{h_1} \equiv 1 \mod d$. Ainsi, pour tout $p \in \mathcal{S}$, on obtient que

$$p^{h_1} \equiv 1 \mod d.$$

Finalement, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, il vient

$$p^{h_1}\alpha_{i,j} \equiv \alpha_{i,j} \mod \mathbb{Z}.$$

D'après le lemme 5.6, on a

$$|\gamma_j^{p^h} - \gamma_j|_p < |\pi_p|, \tag{25}$$

pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $j \in \{1, \dots, r-1\}$. Comme $h = h_1 h_2$, on obtient que

$$p^h \alpha_{i,j} \equiv \alpha_{i,j} \mod \mathbb{Z}, \tag{26}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et tout $p \in \mathcal{S}$.

Démonstration du deuxième pas. — Soit $p \in \mathcal{S}$ et montrons que les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Soit M la forme de Jordan de C_j, alors $C_j = UMU^{-1}$, où $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soient $\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{r,j}$ les valeurs propres de C_j. Soit $J_{\lambda_{i,j}}$ un bloc de Jordan de M qui correspond à la valeur propre $\lambda_{i,j}$. Ainsi, $J_{\lambda_{i,j}} = \lambda_{i,j} I_{n_{\lambda_{i,j}}} + N_{\lambda_{i,j}}$, où $I_{n_{\lambda_{i,j}}}$ est la matrice identité de taille $n_{\lambda_{i,j}}$ et $N_{\lambda_{i,j}}$ est une matrice carrée nilpotente de taille $n_{\lambda_{i,j}}$. D'après le premier pas, $\lambda_{i,j} = \alpha + m$, où α est un exposant de L en γ_j et m un entier. Ainsi,

$$\exp(2\pi i J_{\lambda_{i,j}}) = \exp(2\pi i \alpha) \exp(2\pi i N_{\lambda_{i,j}}). \tag{27}$$

Les valeurs propres de $p^h C_j$ sont $p^h \lambda_{1,j}, \dots, p^h \lambda_{r,j}$. Puisque $p^h C_j = U(p^h M)U^{-1}$, alors $p^h M$ est constituée des blocs de Jordan de M multipliés par p^h. Ainsi, la matrice $p^h J_{\lambda_{i,j}} = p^h(\lambda_{i,j} I_{n_{\lambda_{i,j}}} + N_{\lambda_{i,j}})$ est un bloc de la matrice $p^h M$. Montrons que $p^h \lambda_{i,j} \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}$. Comme on l'a déjà dit $\lambda_{i,j} = \alpha + m$, où α est un exposant de L en γ_j et m un entier. Alors $p^h \lambda_{i,j} = p^h \alpha + p^h m$ et il suit de (26) que $p^h \alpha = \alpha + m'$, où m' est un entier. Donc, $p^h \lambda_{i,j} = \alpha + m' + p^h m$. Comme $m' + p^h m$ est un entier, on a $p^h \lambda_{i,j} \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}$. Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned} \exp(p^h 2\pi i J_{\lambda_{i,j}}) &= \exp(2\pi i p^h \lambda_{i,j}) \exp(2\pi i p^h N_{\lambda_i}) \\ &= \exp(2\pi i \alpha) \exp(2\pi i N_{\lambda_{i,j}}). \end{aligned} \tag{28}$$

D'après (27) et (28), on a $\exp(2\pi i J_{\lambda_{i,j}}) = \exp(p^h 2\pi i J_{\lambda_{i,j}})$. Il suit donc que les matrices $\exp(2\pi i M)$ et $\exp(2\pi p^h M)$ sont conjuguées. Finalement, comme $\exp(2\pi i C_j) = U exp(2\pi i M)U^{-1}$ et $\exp(2\pi i p^h C_j) = U \exp(2\pi i p^h M)U^{-1}$, les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. □

Démonstration du troisième pas. — Soit $p \in \mathcal{S}$ et soit $B = p^h z^{p^h - 1} A(z^{p^h})$. Nous allons montrer que A et B sont E_p-équivalentes. Dans cette partie, nous verrons B comme une matrice à coefficients dans E_p. Pour chaque point singulier $\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_{r-1}, \gamma_r = \infty$ de L, nous notons A_i la matrice construite dans le lemme 5.3 et correspondant au point γ_i.

Démonstration du point **(i)**. Nous allons appliquer le théorème 5.1. Pour cela nous commençons par montrer que les seuls disques singuliers réguliers de B sont $D_{\gamma_1}, \dots, D_{\gamma_{r-1}}, D_\infty$. Par construction de l'ensemble $\mathfrak{A}$, on a $|\gamma_j - \gamma_k|_p = 1$ pour $j \neq k$. Donc $\overline{\gamma_j} \neq \overline{\gamma_k}$ pour $j \neq k$ et $D_{\gamma_j} \cap D_{\gamma_k} = \emptyset$ pour $j \neq k$. Montrons dans un premier temps que si le disque D_α de centre α et de rayon 1 est singulier alors il existe $j \in \{1, \dots, r-1\}$ tel que $D_\alpha = D_{\gamma_j}$. Comme D_α est un disque singulier de B, il existe $t \in D_\alpha$ tel que t est une singularité de B, alors t^{p^h} est

une singularité de A et il existe $i \in \{1, \dots, r-1\}$ tel que $t^{p^h} = \gamma_i$. D'après l'inégalité (25), on a $\overline{\gamma_i} = \overline{\gamma_i}^{p^h}$. Ainsi, on obtient que

$$\bar{t}^{p^h} = \overline{\gamma_i}^{p^h}.$$

Il suit que $\bar{t} = \overline{\gamma_i}$. Ainsi $|t - \gamma_i| < 1$ et comme la norme est ultramétrique, on obtient que

$$|\alpha - \gamma_i| = |\alpha - t + t - \gamma_i| < 1$$

et $D_\alpha = D_{\gamma_i}$.

Montrons dans un deuxième temps que, pour chaque $j \in \{1, \dots, r-1\}$, il existe une matrice B_j à coefficients dans E_p telle que $(z-\gamma_j)B_j$ est à coefficients dans $E(D_{\gamma_j})$ et B est E_p-équivalente à B_j. Cela impliquera que la matrice B est singulière régulière dans les disques D_{γ_j}. D'après la remarque qui suit la preuve du lemme 5.3, il existe $H_j \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz} H_j = AH_j - H_j \frac{1}{z - \gamma_j} A_j.$$

Posons $Q_j := H_j(z^{p^h}) \in \mathrm{GL}_n(E_p)$. On a

$$\frac{d}{dz} Q_j = \frac{d}{dz}(H_j)(z^{p^h}) p^h z^{p^h - 1}$$

et ainsi

$$\frac{d}{dz} Q_j = BQ_j - Q_j \left(\frac{p^h z^{p^h-1}}{z^{p^h} - \gamma_j} \right) A_j(z^{p^h}). \tag{29}$$

Alors la matrice B est E_p-équivalente à $\left(\frac{p^h z^{p^h-1}}{z^{p^h} - \gamma_j} \right) A_j(z^{p^h})$.

Notons que $Frob(\gamma_k) = \gamma_j$ car $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ fixe $\mathbb{Q}$ et ainsi les singularités de $Frob(A) = A$ sont $\{Frob(\gamma_1), \dots, Frob(\gamma_{r-1}), \infty\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{r-1}, \infty\}$. De plus, d'après (20), on a $Frob(A_k) = A_j$. Nous allons appliquer la proposition 5.8 à la matrice $\frac{1}{z-\gamma_k} A_k$, avec $\omega = [(z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j]$. Montrons d'abord que $|\omega - z^{p^h}|_p < |\pi_p|_p$. Comme $\omega = (z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j$, on a

$$\omega - z^{p^h} = (\gamma_j - \gamma_j^{p^h}) + \sum_{k=0}^{p^h-1} (-1)^k \binom{p^h}{k} z^{p^h-k} \gamma_j^k.$$

D'après le théorème de Lucas, on a $\binom{p^h}{k} \equiv 0 \mod p$ pour $0 \le k \le p^h - 1$ et ainsi $|\binom{p^h}{k}|_p \le |p|_p$. Or $\gamma_j \in \mathfrak{A}$, donc on a $|\gamma_j|_p = 1$ et

$$\left| \sum_{k=0}^{p^h-1} (-1)^k \binom{p^h}{k} z^{p^h-k} \gamma_j^k \right|_p \le |p|_p < |\pi_p|_p.$$

L'inégalité (25) donne alors que $|\gamma_j^{p^h} - \gamma_j|_p < |\pi_p|_p$. Il suit

$$|\omega - z^{p^h}|_p < |\pi_p|_p < 1. \tag{30}$$

Comme $p \in \mathcal{S}$, on a $\|A\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$ et $|\gamma_j|_p = 1$ donc le corollaire 5.5 entraîne que $\|\frac{1}{z-\gamma_j}A_j\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$. Comme $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ est un automorphisme isométrique, on a $\|\frac{1}{z-\gamma_k}A_k\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$.

Maintenant, la proposition 5.8 appliqué à $\frac{1}{z-\gamma_k}A_k$ implique que les matrices

$$\frac{d}{dz}(z^{p^h})\left(\frac{1}{z-\gamma_k}A_k\right)^{Frob_{z^{p^h}}} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{d}{dz}(\omega)\left(\frac{1}{z-\gamma_k}A_k\right)^{Frob_\omega}$$

sont E_p-équivalentes. D'après la construction de $Frob_{z^{p^h}}$, on a

$$\frac{d}{dz}(z^{p^h})\left(\frac{1}{z-\gamma_k}A_k\right)^{Frob_{z^{p^h}}} = \frac{p^h z^{p^h-1}}{z^{p^h}-\gamma_j}A_j(z^{p^h}).$$

Notons que

$$\frac{d}{dz}(\omega) = p^h[(z - Frob(\gamma_j))^{p^h-1}],$$

et donc

$$B_j = \frac{p^h}{z-\gamma_j}A_j((z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j). \tag{31}$$

D'après (29), il découle que la matrice B et B_j sont E_p-équivalentes. De plus, on a $(z-\gamma_j)B_j = p^h A_j((z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j)$. Maintenant, si $y \in D_{\gamma_j}$ alors $(y - \gamma_j)^{p^h} + \gamma_j \in D_{\gamma_j}$ et comme A_j est non singulière dans le disque D_{γ_j}, on obtient que $(z-\gamma_j)B_j \in \mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$.

Finalement, montrons que D_∞ est un disque singulier régulier de B. Pour cela, nous posons

$$B_r := \frac{d}{dz}(z^{p^h})(\frac{1}{z^{p^h}})A_r(z^{p^h}) \tag{32}$$

D'après le lemme 5.3, il existe $H_r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H_r = AH_r - H_r\frac{1}{z}A_r.$$

Posons $Q_r := H_r(z^{p^h})$, alors on a

$$\frac{d}{dz}Q_r = BQ_r - Q_rB_r.$$

Ainsi la matrice B est E_p-équivalente à B_r. D'après le lemme 5.3, A_r n'a pas de pôle à l'infini et le corollaire 5.5 donne que A_r n'a pas de singularité dans le disque D_∞. Ainsi le disque D_∞ est non-singulier pour zB_r, autrement dit $zB_r \in \mathcal{M}_n(E(D_\infty))$. D'après le lemme 5.3, les matrices A et $\frac{1}{z-\gamma_j}A_j$ sont $\mathbb{Q}(z)(\gamma_j)$-équivalentes. Puisque $\frac{1}{z-\gamma_j}A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z)(\gamma_j))$, à la suite de la

remarque 3.7, il existe $W_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p(z))$ telle que W_j n'a pas de pôle en γ_j, $C_j = W_j(\gamma_j)$ et $\frac{1}{z-\gamma_j}A_j$ et $\frac{1}{z-\gamma_j}W_j$ sont $\mathbb{C}_p(z)$-équivalentes. D'où, B_j et $R_j = \frac{p^h}{z-\gamma_j}W_j((z-\gamma_j)^{p^h}+\gamma_j)$ sont E_p-équivalentes. Montrons que W_j n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j}. En effet, soit $P(z)/Q(z) \in \mathbb{C}_p(z)$ une entrée de W_j. Écrivons $P(z) = \sum_{i=0}^r a_i(z-\gamma_j)^i$, $Q(z) = \sum_{l=0}^s b_l(z-\gamma_j)^l \in \mathbb{C}_p[z-\gamma_j]$. Soient $a \in \{a_0, \dots, a_r\}$ tel que $|a| = \max\{|a_0|, \dots, |a_r|\}$ et $P_1(z) = \frac{1}{a}P(z)$. Notons que $|P_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. Soient $b \in \{b_0, \dots, b_s\}$ tel que $|b| = \max\{|b_0|, \dots, |b_s|\}$ et $Q_1(z) = \frac{1}{b}Q(z)$. Notons que $|Q_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. Alors $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{b}\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ et $|P_1(z)/Q_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. Notons que les fractions rationnelles $\frac{P(z)}{Q(z)}$ et $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ ont les mêmes pôles. Par conséquent, γ_j n'est pas un pôle de $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$. Alors, $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \sum_{n\geq 0} c_n(z-\gamma_j)^n$. Puisque $|P_1(z)/Q_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$ alors, pour tout $n \geq 0$, $|c_n| \leq 1$. Ainsi, la réduction de $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ est égale à $\sum_{n\geq 0} \overline{c_n}(z-\overline{\gamma_j})^n$. D'où, $\overline{\gamma_j}$ n'est pas un pôle de la réduction de la fraction rationnelle $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$. Par conséquent, la fraction rationnelle $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j} et ainsi, la fraction rationnelle $\frac{P_(z)}{Q_(z)}$ n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j}. Par conséquent, la matrice W_j n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j}. Alors, $(z-\gamma_j)R_j \in \mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$. Ainsi, d'après le théorème 5.1, la matrice B est E_p-équivalente à

$$G = \frac{\gamma_1+m}{(z+m)(z-\gamma_1)}F_1 + \cdots + \frac{\gamma_{r-1}+m}{(z+m)(z-\gamma_{r-1})}F_{r-1} - \frac{1}{z+m}F_r,$$

où $F_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p)$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$ telles que pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$, F_j est semblable à $[(z-\gamma_j)R_j](\gamma_j)$, F_r est semblable à $[-zR_r](\infty)$ et $\sum F_i$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De plus, il suit que pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$, $[(z-\gamma_j)R_j](\gamma_j) = p^h C_j$ et de (32) que $[-zR_r](\infty) = -p^h C_r$. Raison pour laquelle F_j est semblable à $p^h C_j$ pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$ et F_r semblable à $-p^h C_r$.

Démonstration du point **(ii)**. Rappelons que $\kappa : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$ est un isomorphisme de corps. En appliquant l'isomorphisme κ, il vient

$$\begin{aligned} G^\kappa &= \frac{\kappa(\gamma_1)+m}{(z+m)(z-\kappa(\gamma_1))}F_1^\kappa + \cdots + \frac{\kappa(\gamma_{r-1})+m}{(z+m)(z-\kappa(\gamma_{r-1}))}F_{r-1}^\kappa - \frac{1}{z+m}F_r^\kappa \\ &= -\frac{1}{z+m}\left(\sum_{j=1}^r F_j^\kappa\right) + \sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{z-\kappa(\gamma_j)}F_j^\kappa. \end{aligned}$$

Notons que la matrice G^κ est à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ et comme $F_j^\kappa \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice G^κ est fuchsienne, avec $\gamma_0 = -m$, $\kappa(\gamma_1), \dots, \kappa(\gamma_{r-1})$ et l'infini comme singularités.

Montrons que la matrice de monodromie de G^κ en γ_0 est l'identité. En effet, comme $\sum_{j=0}^r F_j$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$, la matrice $[(z+m)G^\kappa](-m) = -\sum_{j=1}^r F_j^\kappa$ est également diagonale et à coefficients entiers,

puisque tout homomorphisme de corps de caractéristique zéro fixe $\mathbb{Z}$. Ainsi, les exposants de G^κ en γ_0 sont des entiers. Donc, d'après le lemme 3.6, il existe une matrice $C_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice de monodromie locale de G^κ en γ_0 est conjuguée à $\exp(2\pi i C_0)$ et telle que l'ensemble des valeurs propres de C_0 est réduit à un élément, $\{s\}$, où s est entier. Écrivons $C_0 = P(D+N)P^{-1}$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, D est diagonale et N est nilpotente. Le théorème 8.6 de [14, Chap. III] nous assure que $TP(X^D X^N)P^{-1}$ est une solution de G^κ, où $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}((z+m)))$. Mais, d'après la remarque 5.2, il suit que G^κ a une basse de solutions à coefficients dans $\mathbb{C}((z+m))$. Donc, $X^N = Id_n$. Ainsi, $C_0 = PDP^{-1}$, $D = sId_n$ et $\exp(2\pi i C_0)$ est conjuguée à Id_n. Par conséquent, la matrice de monodromie locale de G^κ en γ_0 est conjuguée à Id_n. Cela montre que la matrice de monodromie locale de G^κ en γ_0 est l'identité.

Notons que la matrice $(z-\kappa(\gamma_j))G^\kappa$ n'a pas de pôle en $\kappa(\gamma_j)$ et que $[(z-\kappa(\gamma_j))G^\kappa](\gamma_j) = F_j^\kappa$. Montrons que les valeurs propres de F_j^κ sont les valeurs propres de C_j multipliées par p^h. En effet, comme remarqué précédemment, F_j est semblable à $p^h C_j$. Écrivons $C_j = UMU^{-1}$, où M est la forme de Jordan de C_j et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)$. On note que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. En effet, d'après le lemme 5.3, les valeurs propres de $A_j(\gamma_j)$ sont les exposants de L en γ_j qui sont des nombres rationnels et donc la remarque 5.10 implique que les valeurs propres de C_j sont des nombres rationnels. Ainsi, F_j est semblable à $p^h M$ et, comme $p^h M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, on obtient que F_j^κ est semblable à $p^h M$. Notre affirmation en découle.

La remarque 5.10 entraîne que les valeurs propres de $p^h C_j$ sont de la forme $p^h\beta + s$, où s est un entier et β une valeur propre de $A_j(\gamma_j)$. Montrons que deux valeurs propres distinctes de $p^h C_j$ ne diffèrent pas d'un entier. En effet, supposons que $\lambda' - \beta' \in \mathbb{Z}$, où λ' et β' sont deux valeurs propres de $p^h C_j$. Alors $\lambda' = p^h\lambda$ et $\beta' = p^h\beta$, où λ et β sont deux valeurs propres de C_j. Alors, $p^h(\lambda-\beta) \in \mathbb{Z}$. D'après le premier pas, il existe des entiers m_λ et m_β, et λ_1 et β_1 des exposants de L en γ_j, tels que $\lambda = \lambda_1 + m_\lambda$ et $\beta = \beta_1 + m_\beta$. Alors $p^h(\lambda_1-\beta_1) \in \mathbb{Z}$. Il découle de (26) que $p^h\lambda_1 \equiv \lambda_1 \mod \mathbb{Z}$ et $p^h\beta_1 \equiv \beta_1 \mod \mathbb{Z}$. Ainsi, $p^h(\lambda_1-\beta_1) \equiv \lambda_1 - \beta_1 \mod \mathbb{Z}$. Mais comme $p^h(\lambda_1-\beta_1) \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\lambda_1 - \beta_1 \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $\lambda - \beta = (\lambda_1-\beta_1) - (m_\beta - m_\lambda) \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, d'après le premier pas, $\lambda = \beta$ et ainsi $\lambda' = \beta'$. Alors, on a :

($\mathbf{a'}$) deux valeurs propres de $p^h C_j$ distinctes ne diffèrent pas d'un entier.

Ainsi, deux valeurs propres différentes de F_j^κ ne diffèrent pas d'un entier. D'après la proposition 3.12, le lemme 3.42 et le théorème 5.1 de [21], la matrice de monodromie locale de G^κ en $\kappa(\gamma_j)$, $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$, est conjuguée à $\exp(2\pi i F_j^\kappa)$. Comme F_j^κ est semblable à $p^h C_j$, on obtient que les matrices $\exp(2\pi i F_j^\kappa)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Cela donne que $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$ est conjuguée à $\exp(2\pi i p^h C_j)$. D'après le deuxième pas, $\exp(2\pi i p^h C_j)$ et $\exp(2\pi i C_j)$

sont conjuguées et d'après le premier pas, les matrices $\exp(2\pi i p^h C_j)$ et $M(A,\gamma_j)$ sont conjuguées. Donc $M(G^\kappa,\kappa(\gamma_j))$ est conjuguée à $M(A,\gamma_j)$.

Notons que $\{\kappa(\gamma_1),\dots,\kappa(\gamma_{r-1})\}=\{\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1}\}$. Comme le groupe de monodromie de A est rigide, les groupes de monodromie de A et G^κ sont conjugués.

Démonstration du point **(iii)**. D'après ce qui précède, il existe $U\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(A,\gamma_j)=UM(G^\kappa,\kappa(\gamma_j))U^{-1}$ pour $1\le j\le r$. D'après la proposition 3.4, il existe $H_1\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H_1=AH_1-H_1G^\kappa.$$

On pose $H=H_1^{\kappa^{-1}}$, ainsi $H\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p(z))\subset \mathrm{GL}_n(E_p)$ et comme $\frac{d}{dz}$ et κ^{-1} commutent, on a

$$\frac{d}{dz}H=A^{\kappa^{-1}}H-HG.$$

Remarquons que $A^{\kappa^{-1}}=A$, puisque A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$. Par conséquent, A et G sont E_p-équivalentes. D'après le point **(ii)**, G est E_p-équivalentes à B, alors par transitivité on obtient que A et B sont E_p-équivalentes. □

Remarque 5.11. — La preuve précédente montre en réalité que pour tout entier $h'\ge 1$ tel que pour tout $p\in\mathcal{S}$ les équations (25) et (26) sont vérifiées, alors L a une structure de Frobenius forte de période h'.

6. L'opérateur hypergéométrique généralisé

Dans cette partie, nous étudions les structures de Frobenius forte des opérateurs hypergéométriques généralisés. Nous démontrons notamment le théorème 1.2.

Considérons l'opérateur différentiel hypergéométrique défini par

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta}):-z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)y+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \tag{33}$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ sont des nombres rationnels tels que $\alpha_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Cet opérateur est fuchsien et a 1, 0 et l'infini comme seules singularités. Les exposants à l'infini sont $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, les exposants en 0 sont $1-\beta_1,\dots,1-\beta_n$, et les exposants en 1 sont $0,1,\dots,n-2,-1+\sum(\beta_i-\alpha_i)$. Nous rappelons la définition suivante (voir [6]).

Définition 6.1. — Supposons que $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}^*$ vérifient $a_i\ne b_j$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Un groupe hypergéométrique associé aux paramètres $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par des

matrices $h_0, h_1, h_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que h_1 est une réflexion et

$$h_\infty h_1 h_0 = Id,$$
$$det(z - h_\infty) = \prod (z - a_i),$$
$$det(z - h_0^{-1}) = \prod (z - b_j).$$

D'après un résultat de Levelt (voir le théorème 3.5 de [6]), un groupe hypergéometrique tel que $a_i \neq b_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ est rigide. D'autre part, il est connu que le groupe de monodromie de l'opérateur hypergéométrique $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est un groupe hypergéométrique associé aux paramètres $a_i = exp(2\pi i \alpha_i)$ et $b_i = exp(2\pi i \beta_i)$ (voir [6]). Ainsi, le groupe de monodromie de (33) est rigide. Donc, grâce au théorème 3.8, $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ a une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p. En appliquant le théorème 3.8 on a le théorème suivant.

Théorème 6.2. — *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que $|\alpha_i|_p, |\beta_j|_p \leq 1$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Alors, pour tout $p \in \mathcal{S}$, l'opérateur hypergéométrique $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ possède une structure de Frobenius forte de période $h = \varphi(d_{\alpha,\beta})$, où φ est l'indicatrice d'Euler et $d_{\alpha,\beta}$ est le plus petit commun multiple des dénominateurs de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$.*

Démonstration. — En développant l'équation (33), on obtient

$$(1 - z)\delta^n + [S_{n,1}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,1}(\underline{\alpha})]\delta^{n-1} + \cdots + S_{n,n}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,n}(\underline{\alpha}),$$

où $\underline{\beta} - 1 = (\beta_1 - 1, \ldots, \beta_n - 1)$ et $S_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} X_1 \cdots X_{i_k}$.

En écrivant cette équation en fonction de l'opérateur $\frac{d}{dz}$, il vient

$$L_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} := a_0(z)\frac{d}{dz^n}y + a_1(z)\frac{d}{dz^{n-1}}y + \cdots + a_n(z).$$

Soit A la matrice compagnon de ce nouvel opérateur. D'après l'équation (19), on a

$$\begin{aligned}\big(S_{n,n}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,n}(\underline{\alpha}), \ldots, S_{n,1}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,1}(\underline{\alpha}), 1 - z\big)\, G_{n+1}^{-1} \\ = (a_n(z), \ldots, a_1(z), a_0(z)).\end{aligned}$$

Ainsi $a_0(z) = (1 - z)z^n$ et le discriminant de $a_0(z)$ est 1. Dans ce cas, on obtient que $\mathfrak{A}_1 = \{1\}$, alors que l'ensemble $\mathfrak{A}_2$ est donné par les dénominateurs des α_i, des $1 - \beta_j$ et le dénominateur de $-1 + \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)$. Finalement $\mathfrak{A}_3 = \left\{\frac{a_i(z)}{a_0(z)}\right\}_{1 \leq i \leq n}$. Comme $p \in \mathcal{S}$, on obtient que pour tout élément de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ est de norme p-adique est égale à 1. A présent, montrons que, pour tout $p \in \mathcal{S}$, $\left|\frac{a_i(z)}{a_0(z)}\right|_{\mathcal{G}} \leq 1$. En effet, si $p \in \mathcal{S}$, alors

$$\big\|\big(S_{n,n}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,n}(\underline{\alpha}), \ldots, S_{n,1}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,1}(\underline{\alpha}), 1 - z\big)\big\|_{\mathcal{G},p} \leq 1.$$

On vérifie aisément que, pour tout nombre premier p, $\|G_{n+1}^{-1}\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$. En particulier, il en est de même pour $p \in \mathcal{S}$. Ainsi, la norme de Gauss du vecteur $(a_n(z), \ldots, a_1(z), a_0(z))$ est inférieure ou égale à 1 pour tout $p \in \mathcal{S}$. D'autre part, pour tout $p \in \mathcal{S}$, $|a_0(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. On obtient donc que $\left|\frac{a_i(z)}{a_0(z)}\right|_{\mathcal{G}} \leq 1$, pour tout $p \in \mathcal{S}$.

Finalement, comme $|\alpha_i|_p, |\beta_j|_p \leq 1$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, alors p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$. Ainsi, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})} \equiv 1 \mod d_{\alpha,\beta}$$
$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})} \equiv 1 \mod d_{\alpha,\beta}$$

et donc

$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\alpha_i \equiv \alpha_i \mod \mathbb{Z}$$
$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\beta_j \equiv \beta_j \mod \mathbb{Z}.$$

Il suit que

$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\alpha_i \equiv \alpha_i \mod \mathbb{Z},$$
$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}(1-\beta_j) \equiv 1-\beta_j \mod \mathbb{Z} \qquad \text{et}$$
$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\left(-1+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\right) \equiv -1+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i) \mod \mathbb{Z}.$$

De plus, ici les zéros de $a_0(z)$ sont $\gamma_1 = 0$ et $\gamma_2 = 1$, d'où $|\gamma_i^{p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}} - \gamma_i| = 0 < |\pi_p|$ pour $i \in \{1, 2\}$. Donc, d'après la remarque 5.11, pour tout $p \in \mathcal{S}$ l'opérateur différentiel $L_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ possède une structure de Frobenius forte de période $\varphi(d_{\alpha,\beta})$. Ainsi, pour tout $p \in \mathcal{S}$, l'opérateur différentiel $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ a une structure de Frobenius forte de période $\varphi(d_{\alpha,\beta})$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.2.

Démonstration du théorème 1.2. — Soit $p \in \mathcal{S}$. Alors p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$, de sorte que $|\alpha_i|_p, |\beta_j|_p \leq 1$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. D'après le théorème 6.2, on obtient que

$$-z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n) + (\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1)$$

possède une structure de Frobenius forte pour p de période h. Par hypothèse, on a également ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Le théorème 2.6 implique donc que la réduction de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z)$ modulo p est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{n^2h}. Enfin, la démonstration du théorème 6.2 montre que l'on peut prendre $h = \phi(d_{\alpha,\beta})$. □

Pur conclure, nous appliquons le théorème 1.2 aux deux séries hypergéométriques $f_2(z) = {}_3F_2\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1, 1, z\right)$ et $f_3(z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{5}{12}, 1, z\right)$.

À ce jour, on ne sait toujours pas si $f_2(z)$ est une diagonale de fraction rationnelle et on ne peut donc pas appliquer les résultats de [1]. D'autre part, les résultats de [3] ne s'appliquent pas non plus à la série $f_2(z)$ (voir [3, Example 8.6]). Notons que $f_2(z)$ est globalement bornée puisqu'on vérifie aisément que $f_2(27^2 z) \in \mathbb{Z}[[z]]$. Ainsi, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$ pour tout $p \neq 3$. Notons que dans ce cas, on a $d_{\alpha,\beta} = 9$, où $\alpha = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$ et $\beta = \left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$. Le théorème 1.2 nous garanti donc que, pour tout nombre premier $p \neq 3$, $f_{2|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{54}.

On sait que la série $f_3(z)$ n'est pas la diagonale d'une fraction rationnelle car elle n'est pas globalement bornée (voir proposition 1 de [10]). Ainsi, on ne peut pas non plus lui appliquer les résultats de [1]. D'autre part, les résultats de [3] ne peuvent pas lui être appliqués non plus (voir la section 8 de [3]). Par contre, le théorème 1.2 s'applique. En effet, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers tels que $f_3(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$. Cet ensemble est infini car si p est un nombre premier congruent à 1 modulo 12, alors $p \in \mathcal{S}$. Dans ce cas, on vérifie que $d_{\alpha,\beta} = 12$, où $\alpha = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ et $\beta = \left(\frac{5}{12}, 1, \right)$. D'après le théorème 1.2, si $p > 3$ appartient à $\mathcal{S}$, alors $f_{3|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{16}.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier chaleureusement Gilles Christol pour ses commentaires sur une version préliminaire de cet article. Il remercie également l'arbitre pour sa lecture attentive ainsi que ses différentes remarques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Adamczewski & J. P. Bell – « Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **46** (2013), p. 963–1004.

[2] B. Adamczewski, J. P. Bell & E. Delaygue – « Algebraic independence of G-functions and congruences "à la Lucas" », arXiv1603.04187 [math.NT].

[3] ———, « Algebraic independence of G-functions and congruences "à la Lucas" », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **52** (2019), p. 515–559.

[4] B. Adamczewski & E. Delaygue – 2019, communication personnelle.

[5] Y. André – *G-functions and geometry*, Aspects of Math. **E**, no. 13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[6] F. Beukers & G. Heckeman – « Monodromy for the hypergeometric fonction ${}_nF_{n-1}$ », *Invent. Math.* **95** (1989), p. 325–354.

[7] G. Christol – « Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Applications aux équations différentielles », *Groupe de travail d'analyse ultramétrique* **7–8** (1979–1981), no. 5, p. 1–17.

[8] ———, *Modules différentielles et équations différentielles p-adiques*, Queen's papers in pure and applied mathematics, no. 66, 1983.

[9] ———, « Fonctions et éléments algébriques », *Pacific J. of Math.* **125** (1986), p. 1–37.

[10] ———, « Fonctions hypergéométriques bornées », *Groupe de travail d'analyse ultramétrique* **14** (1986–1987), no. 8, p. 1–16.

[11] R. Crew – « Rigidity and Frobenius structure », *Documenta Mathematica* **22** (2017), p. 287–296.

[12] P. Deligne – « Théorie de Hodge : II », *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **40** (1971), p. 5–57.

[13] ———, « Intégration sur un cycle évanescent », *Invent. Math.* **76** (1983), p. 129–143.

[14] B. Dwork, G. Gerotto & F. Sullivan – *A introduction to G-functions*, Annal of Mathematics Studies, no. 133, Princeton University Press, 1994.

[15] B. M. Dwork – « On p-adic differential equations I. The Frobenius strcuture of differential equations », *Bull. Soc. Math. France, Mém.* **39–40** (1974), p. 27–37.

[16] ———, *Lectures on p-adic differential equations*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, no. 253, Springer-Verlag, New York, 1982.

[17] H. Esnault & M. Groechenig – « Rigid connections and F-isocrystals », arXiv :1707.00752 [math.AG].

[18] H. Furstenberg – « Algebraic functions over finite fields », *J. Algebra* **7** (1967), p. 271–277.

[19] N. Katz – *Rigid local systems*, Annals of Math. Studies, no. 139, Univ. Pres, Princeton, 1996.

[20] K. Kedlaya – *p-adic differential equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 125, University Press, Cambridge, 2010.

[21] M. van der Put & M. F. Singer – *Galois theory of linear equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. 328, Springer, 2003.

[22] A. Salinier – « Structure de Frobenius forte de l'équation différentielle hypergéométrique », *C. R. Acad. Sci. Paris* **305** (1987), p. 393–396.

[23] C. Siegel – *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abhandlungen Akad. Berlin, 1929.